Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

2. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 13. November 2013, 15 Uhr

1. Aufgabe (Kontraktionssatz, Umkehrfunktion, 4 Punkte)
Sei $f(x) := \tan x$ und $I := (\pi/2, 3\pi/2)$. Gesucht ist eine Lösung ξ der Gleichung $f(x) = x$ für $x \in I$. Ist die Lösung eindeutig?
Beantworten Sie hierzu:

a) Wieso ist der Kontraktionssatz nicht anwendbar?

b) Welches hierzu äquivalente Fixpunktproblem könnte stattdessen betrachtet werden?

c) Weisen Sie nach, dass für dieses Problem die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, und damit nur genau ein ξ existiert.

Tipp: Betrachten Sie die Umkehrfunktion von f.

2. Aufgabe (Konvergenz des Newton-Verfahrens, 4 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es genau ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.

Zeigen Sie:
Ist $x_0 \in [a, b]$ beliebig mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.
Tipp: benutzen Sie vollständige Induktion; aus $f(x_n) \geq 0$ folgt auch $x_n \geq \xi$ und $f'(x_n) \geq f'(\xi) > 0$ (f' ist monoton wachsend, da f konvex ist: $f''(x) \geq 0 \,\forall\, x \in (a, b)$).

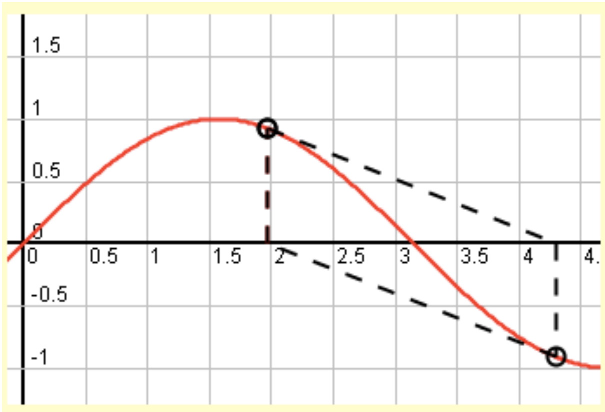
3. Aufgabe (Rechnen mit dem Fixpunktsatz, 4 Punkte)
Stellen Sie zu folgenden Ausdrücken eine Gleichung in Fixpunktform auf und überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf einer geeigneten Menge:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}, \qquad \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$$

Berechnen Sie dann den Fixpunkt.

4. Aufgabe (Lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens, 4 Punkte)
Sie stellen im Unterricht das Newton-Verfahren für eine stetig differenzierbare Funktion f mit Nullstelle α und $f'(\alpha) \neq 0$ vor. Ein Schüler ist nicht von der lokalen Konvergenz des Newton-Verfahrens überzeugt und nennt Ihnen ein Beispiel:

"Ich suche die Nullstelle von $\sin x$ für $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$ (s. Abb.). Die Funktion ist dort lokal punktsymmetrisch und die Nullstelle ist auch ein Wendepunkt. Aus Symmetriegründen muss das Verfahren hin und her springen, ohne sich aber der Nullstelle zu nähern, egal wie dicht man an der Nullstelle startet."



Wo liegt der Denkfehler?