Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

4. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 20. November 2013, 15 Uhr

1. Aufgabe (Regelfunktion, 4 Punkte)
Zeigen Sie: monotone Funktionen sind Regelfunktionen.

2. Aufgabe (Riemman Integrierbarkeit, 2 Punkte)
Sei $a < b$ und $\mathcal{T}[a, b]$ die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn Ober- und Untersumme übereinstimmen:

$$\inf \left\{ \int_a^b \tau(x)\ \mathrm{d}x \,\middle|\, \tau \in \mathcal{T}[a, b], \tau \geq f \right\} = \sup \left\{ \int_a^b \tau(x)\ \mathrm{d}x \,\middle|\, \tau \in \mathcal{T}[a, b], \tau \leq f \right\}.$$

Finden Sie eine Funktion, die Riemann-, aber nicht Cauchy-Riemann integrierbar ist. Begründen Sie.

3. Aufgabe (Vertauschen von Grenzwerten, 4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f_n : [0, a] \to \mathbb{R}$ mit $a \in [0, 1]$ und $f_n(x) = (n + 1)\, x^n$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in [0, 1]$ folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\int_0^a \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

b) Für welche a besteht Gleichheit?

c) Erläutern Sie den Unterschied im Verhalten von f_n in Abhängigkeit von a. Welche Eigenschaft von f_n erlaubt das Vertauschen der Grenzwerte?

4. Aufgabe (Rechnen mit Integralen, 6 Punkte)
Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x \ln x} \right) \mathrm{d}x$ (Tipp: Substitution)

b) $\displaystyle\int \tan^2(x)\, \mathrm{d}x$ (Tipp: Nutzen Sie $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und berechnen die Ableitung von $\tan x$)

c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4 + 5x^2 + 4}\, \mathrm{d}x$ (Tipp: zuerst Substitution, dann Partialbruchzerlegung)