Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

5. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 27. November 2013, 15 Uhr

1. Aufgabe (Trapez-Regel, 4 Punkte)
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, dass

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) - R,$$

$$\text{mit dem Restglied}\quad R = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{12}f''(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in [0,1].$$

2. Aufgabe (Iterationsformel, 4 Punkte)
Gegeben ist das Integral $A_m := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^m x\ \mathrm{d}x$.

a) Zeigen Sie, dass $A_m = \dfrac{m-1}{m} A_{m-2}$ für $m \geq 2$.

b) Nutzen Sie diese Erkenntnis, um folgende Darstellung für π zu beweisen:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

(Tipp: Betrachten Sie A_m getrennt für gerade und ungerade m.)

3. Aufgabe (Uneigentliche Integrale, 4 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\ \mathrm{d}x$ für $s > 1$

4. Aufgabe (Konvergenz von Reihen und Integralen, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s > 1$ konvergiert und für $s \leq 1$ divergiert.

Tipp: Nutzen Sie den folgenden Satz: Für eine monoton fallende Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \text{ konvergiert.}$$