Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

6. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 4. Dezember 2013, 15 Uhr

1. Aufgabe (Konvergenz von uneigentlichen Integralen, 4 Punkte)
Bestimmen Sie die Menge der $a \in \mathbb{R}$ für die folgende Integrale konvergieren:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^a\,\mathrm{d}x$

2. Aufgabe (Reihenkonvergenz, 4 Punkte)
Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x} = f(x).$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe definiert?

b) Auf welchen Intervallen besteht gleichmäßige Konvergenz, auf welchen nicht?

3. Aufgabe (Grenzwertberechnung, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe gegen folgenden Grenzwert konvergiert:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \ldots \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Erklären Sie, wieso dies nicht im Widerspruch dazu steht, dass die alternierende harmonische Reihe den Grenzwert $\ln 2$ hat.

4. Aufgabe (Mathematische Texte verfassen, 4 Punkte)
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Wir nennen die beiden Funktionen "punktweise gleich", $f \equiv g$, falls

$$f(x) = g(x)\ \forall\ x \in [a, b].$$

Desweiteren nennen wir die beiden Funktionen "integral gleich", $f =_I g$, falls

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Erklären Sie in maximal 1-2 Seiten den Unterschied der beiden Definitionen. *Hinweis/Vorschlag für die Struktur: Nr.1) Behauptungen oder Feststellungen klarmachen, Nr.2) Erklärung ggf. Beweis der Erkenntnisse aus 1) und Nr.3) Allgemeine Schlussfolgerungen in Form eines Fazits ziehen.*