Analysis II (lehramtsbezogen): Lösung zu Aufgabe 2, Übung 6

Ariane Papke

27. November 2013

Aufgabe
Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x} = f(x).$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe definiert?
b) Auf welchen Intervallen besteht gleichmäßige Konvergenz, auf welchen nicht?

Lösung.

a) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{-\frac{1}{k^2}, k \in \mathbb{N}\right\}, \{0\}\right)$.
b) Zunächst betrachten wir die Intervalle $(-\infty, -1)$ und $(0, \infty)$. Dazu definieren wir die Partialsummen (Folgenglieder)

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2x}, \tag{1}$$

und bestimmen $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{D}} |f(x) - f_n(x)|$.

i) Für $x \in (-\infty, -1)$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(-\infty,-1)} |f(x) - f_n(x)| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2x} \right\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x} \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\| \frac{1}{1+k^2x} \right\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}\end{aligned}$$

Die obere Schranke ist eine konvergente Nullfolge für $n \to \infty$. Das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} < \varepsilon,$$

und somit auch

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,-1)} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in (-\infty, -1)$. Die Folge der Partialsummen $f_n(x)$ konvergiert also gleichmäßig gegen $f(x)$.

ii) Betrachten wir $x \in (0,\infty)$, so ist mit ähnlicher Rechnung

$$\sup_{x\in(0,\infty)} |f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\| \frac{1}{1+k^2x} \right\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{\infty} 1 \to \infty$$

jedoch divergent. Hingegen ist $f_n(x)$ aber auf $[\epsilon,\infty)$ für alle $\epsilon > 0$ gleichmäßig stetig, denn

$$\sup_{x\in[\epsilon,\infty)} |f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\| \frac{1}{1+k^2x} \right\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+\epsilon k^2}$$

ist eine konvergente Nullfolge für $n \to \infty$.

iii) Wir definieren $I := \left(-\frac{1}{N^2}, -\frac{1}{M^2}\right)$ für $M, N \in \mathbb{N}$ und $M > N$. Für jedes I und für alle $x \in I$ finden wir

$$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\| \frac{1}{1+k^2x} \right\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{1-k^2/M^2} \right|.$$

Dieser Ausdruck ist beschränkt für alle $n > M$. Insbesondere gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$ sodass für alle $x \in I$ und $n \geq M$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Die Folge $f_n(x)$ konvergiert gleichmäßig auf jedem I.

Gleichmäßige Konvergenz besteht also auf $\mathbb{D} \setminus (0,\epsilon)$ für jedes $\epsilon > 0$.

Zusatzaufgabe
Wo ist f auf seinem Definitionsbereich sogar stetig?

Lösung. Die Funktion $f(x)$ ist auf ganz $\mathbb{D}$ stetig, denn

i) auf $\mathbb{D} \setminus (0,\epsilon)$ sind die Funktionen $f_n(x)$ (1) stetig und konvergieren gleichmäßig gegen $f(x)$, somit ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{D} \setminus (0,\epsilon)$.

ii) Sei nun $x \in (0,\infty)$. Dann ist $f_n(x)$ gleichmäßige konvergent und somit $f(x)$ stetig für jedes Intervall $\left[\frac{x}{2},\infty\right)$. Also ist $f(x)$ stetig auf $(0,\infty)$.