Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

7. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 11. Dezember 2013, 15 Uhr

1. Aufgabe (Berechnung von Fourierkoeffizienten, 4 Punkte)
Eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt trigonometrisches Polynom, falls sie als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

für $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_k, b_k durch die Funktion f eindeutig festgelegt sind und es gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x.$$

(Hinweis: beweisen und benutzen Sie die Orthogonalitätsbeziehungen
$\int_0^{2\pi} \cos kx \, \sin lx \, \mathrm{d}x = 0$ und $\int_0^{2\pi} \cos kx \, \cos lx \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin kx \, \sin lx \, \mathrm{d}x = \pi \delta_{kl}$ für $k, l \neq 0$).

2. Aufgabe (Fourierentwicklung gerader/ungerader Funktionen, 4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Fourierreihe einer geraden Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reine Cosinusreihe ist:

$$(\mathcal{F}f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x.$$

b) Zeigen Sie auch: Für ungerade Funktionen f ist $\mathcal{F}f$ eine reine Sinusreihe:

$$(\mathcal{F}f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x.$$

3. Aufgabe (Skalarprodukt, 4 Punkte)
Auf dem Raum V der 2π-periodischen und auf $[0, 2\pi]$ integrierbaren Funktionen sei das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \, \bar{g} \; \mathrm{d}x$$

definiert. Ferner setzen wir $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

a) Prüfen Sie, ob $\|\cdot\|_2$ alle Eigenschaften einer Norm hat. Welche Eigenschaft einer Norm ist möglicherweise nicht erfüllt, und wie könnte man die Normeigenschaft retten? (Stichwort: letzter Übungszettel)

b) Finden Sie eine Folge in V, die im quadratischen Mittel, aber weder gleichmäßig noch punktweise konvergiert (mit Begründung).

4. Aufgabe (Graphische Darstellung, 4 Punkte)
Berechnen Sie die Fourierreihe $\mathcal{F}f$ für $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ und zeichnen Sie

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

für $n = 1, 5, 20, 21, 50, 51$. Stellen Sie eine Vermutung über die Konvergenz auf.