Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

8. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 18. Dezember 2013, 15 Uhr

1. Aufgabe (Fourierreihe, 4 Punkte) Die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei als punktweiser Grenzwert der Reihe

$$f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\quad f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}2^{-k/2}\sin(2^k x)$$

gegeben. Zeichnen Sie die Reihe auf dem Intervall $[0,2\pi]$ für $n=1,5,10,100$. Zeigen Sie darüber hinaus:

a) Es gilt $\|f_n-f\|_2\to 0$ für $n\to\infty$.

b) Die Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig, aber nirgends differenzierbar.

2. Aufgabe (Konvergenz im quadratischen Mittel, 4 Punkte) Es sei W der Vektorraum aller auf $[a,b]\subset\mathbb{R}$ integrablen Funktionen $f\colon[a,b]\to\mathbb{C}$, den wir mit der L^2-Norm

$$\|f\|_2=\left(\int_a^b|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

ausstatten.

a) Beweisen Sie dass für Funktionen $f_n,f\in W$, $n\in\mathbb{N}$ aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n\to f$ auf $[a,b]$ stets die Konvergenz im quadratischen Mittel folgt, nicht jedoch umgekehrt.

b) Ist der L^2-Grenzwert immer eindeutig? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(**Tipp:** Zeigen Sie zunächst, dass die L^2-Norm schwächer als die Supremumsnorm auf W ist, d.h., dass es eine Konstante $C>0$ gibt, so dass $\|f\|_2\le C\|f\|_\infty$, $f\in W$.)

3. Aufgabe (Riemannsches Lemma, 4 Punkte)
Zeigen, dass für alle auf $[0,2\pi]\subset\mathbb{R}$ integrablen, periodischen Funktionen $f\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=0\quad\text{und}\quad\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=0\,.$$

4. Aufgabe (Anfangswertproblem, 4 Punkte)
Sie werfen einen Stein in einen Brunnen und hören nach τ Sekunden den Aufprall.

a) Stellen Sie ein geeignetes Anfangswertproblem für die Flugbahn des Steins auf.

b) Wie tief ist der Brunnen, wenn $\tau=5$ ist? Diskutieren Sie die Modellierungsannahmen aus a).