Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

9. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 15. Januar 2014, 15 Uhr

1. Aufgabe (Differenzierbarkeit, 4 Punkte)
Für eine total differenzierbare Funktion existiert in jeder Richtung eine Richtungsableitung. Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt, also dass eine Funktion, die in jeder Richtung differenzierbar ist, nicht total differenzierbar sein muss.
Tipp: Nutzen Sie als Gegenbeispiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0, & (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

2. Aufgabe (Quadratische Form, 4 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor und $A \in M_2(\mathbb{R})$ eine 2×2-Matrix.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = x^\top A x$$
differenzierbar ist und bestimmen Sie den Gradienten.

b) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ und $a = 1, -1$. Untersuchen Sie die Funktion auf Extremstellen und zeichnen Sie f für beide Werte von a.

3. Aufgabe (Richtung des Gradienten, 4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x \in M$ und $f(x) =: c$. Zeigen Sie, dass der Gradient $\nabla f(x)$ auf der Niveaufläche

$$L_f(c) = \{z \in M : f(z) = c\}$$

senkrecht steht, d.h. für eine beliebige stetig differenzierbare Kurve $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$, $\varepsilon > 0$, mit $\phi(0) = x$ und $N \subset L_f(c)$ gilt $\phi'(0) \cdot \nabla f(x) = 0$.

4. Aufgabe (Taylorentwicklung, 4 Punkte)
Sei $f : [0,2] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von f im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Terme zweiter Ordnung. Zeichnen Sie die Funktionen (ohne Restglied). Wie groß ist der Approximationsfehler des Taylorpolynoms in der Supremumsnorm?