Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, A. Papke

Wer spricht von Siegen, Überleben ist alles.
Rainer Maria Rilke

Klausurvorbereitungsausfgaben für die Feiertage
Analysis II
im WS 2013/2014

Teil I (Basiswissen)
Sofern nichts anderes angegeben ist, beziehen sich die Aussagen stets auf die natürliche Metrik $d(x, y) = |x - y|$ bzw. den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

wahr	falsch	Aussage
		Eine Folge von Funktionen $f_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ die im quadratischen Mittel konvergiert, hat einen eindeutigen Grenzwert $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.
		Jedes Polynom ungeraden Grades hat eine reelle Nullstelle
		Punktweise Grenzwerte stetiger Funktionen sind stetig.
		Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Dann gibt es Cauchy-Folgen in $(C(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, die keinen Grenzwert in $(C(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ haben.
		Jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to [a, b]$ hat einen Fixpunkt.
		Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Ist $f_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $f > 0$.
		Jede Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V induziert eine Metrik $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$.
		Konvergiert das Newton-Verfahren, so ist die Konvergenz quadratisch.
		Sind f, g uneigentlich integrierbar, so ist auch $f \cdot g$ uneigentlich integrierbar.
		Lipschitz-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig.
		Ist eine Funktion stetig und differenzierbar, so ist sie auch stetig differenzierbar.
		Monotone Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sind Regelfunktionen.
		Sind $f_n, f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $n \in \mathbb{N}$ und gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so konvergiert $\int_a^b f_n(x)dx$ gegen $\int_a^b f(x)dx$.
		Beschränkte und monotone Folgen in $(CK(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ sind konvergent.
		Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^4 + xy - 10 > 0\}$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.
		Ein Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn $f'' \geq 0$.

Teil II (Rechenaufgaben)

Aufgabe 1 (Integration)
Sei $a > 0$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^1 \log ax \, dx \,, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+a^2x^2} \,, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+ax)^2} \,, \qquad \int \frac{dx}{1-a^2x^2} \,.$$

Aufgabe 2 (Funktionenfolge)
Es sei $(f_n)_n$ die durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x/n} \,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \,, \; n \in \mathbb{N}$$

definierte Funktionenfolge.

(a) Untersuchen Sie $(f_n)_n$ auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty f_n(x) \, dx \,, \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

(c) Kommentieren Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) im Hinblick auf die Vertauschbarkeit von Grenzwerten.

Aufgabe 3 (Unendliche Reihe)
Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty n^2 e^{-xn^2} \,, \quad x \in \mathbb{R}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 4 (Babylonisches Wurzelziehen)
Stellen Sie ein geeignetes iteratives Verfahren auf, um $\sqrt{a}$ für $a \geq 0$ zu berechnen, und berechnen Sie damit $\sqrt{2}$ bis auf 10 Nachkommastellen genau.

(**Tipp:** Newton-Verfahren.)

Aufgabe 5 (Differentialgleichung 2. Ordnung)
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \,, \quad y(0) = 1, \, y'(0) = 0 \,,$$

und zeichnen Sie das Phaseportrait, d.h., zeichnen Sie die Kurve $\{(y(t), y'(t)) \colon 0 \leq t \leq T\}$ in der Ebene für ein geeignet großes T.

(**Hinweis:** Verwenden Sie den allgemeinen Lösungsansatz $y(t) = Ae^{Bt}$ für $A, B \in \mathbb{C}$.)

Aufgabe 6 (Inhomogenes Anfangswertproblem)
Bestimmen sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$x'(t) = -2x(t) + \exp(t)\,, \quad x(0) = x_0\,,$$

so dass in der Darstellung der Lösung kein Integral mehr auftritt. Wie muss $x_0 \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $x(t)$ an der Stelle $t = 1$ den Wert 0 annimmt?

Aufgabe 7 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit)
Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit.

Teil III (Leichte Beweise)

Aufgabe 8 (Kontraktion)
Es sei $K \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, auf dem eine differenzierbare Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ definiert sei, für die $\|f'\|_\infty < 1$ gelte. Zeigen Sie, dass f eine Kontraktion ist.

Aufgabe 9 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es eine Zahl $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\,.$$

Veranschaulichen Sie die Aussage durch eine Zeichnung.

Aufgabe 10 (Bestapproximationseigenschaft)
Es sei V der Vektorraum der integrablen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\,.$$

Ferner sei V_n der n-dimensionale Unterraum, der durch die paarweise orthonormalen Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aufgespannt werde. (Es gilt also $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$.) Durch

$$P\colon V \to V_n\,, \quad (Pf)(x) = \sum_{k=1}^n \langle \varphi_k, f \rangle\, \varphi_k(x)$$

sei eine lineare Abbildung auf V definiert. Zeigen Sie, dass P die Bestapproximationseigenschaft

$$\|f - Pf\|_2 = \min_{g \in V} \|f - g\|_2$$

hat, wobei $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte 2-Norm auf V ist.

(**Tipp:** Zeigen Sie, dass P die Orthogonalprojektion von V auf V_n ist.)