Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, A. Papke

Wer spricht von Siegen, Überleben ist alles.
Rainer Maria Rilke

Lösung zu Klausurvorbereitungsausfgaben für die Feiertage Analysis II im WS 2013/2014

Teil I (Basiswissen)
Sofern nichts anderes angegeben ist, beziehen sich die Aussagen stets auf die natürliche Metrik $d(x, y) = |x - y|$ bzw. den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

wahr	falsch	Aussage
	✗	Eine Folge von Funktionen $f_n \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ die im quadratischen Mittel konvergiert, hat einen eindeutigen Grenzwert $f \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.
✗		Jedes Polynom ungeraden Grades hat eine reelle Nullstelle
	✗	Punktweise Grenzwerte stetiger Funktionen sind stetig.
		Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Dann gibt es Cauchy-Folgen in $(C(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, die keinen Grenzwert in $(C(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ haben.
✗		Jede stetige Funktion $f \colon [a, b] \to [a, b]$ hat einen Fixpunkt.
	✗	Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Ist $f_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $f > 0$.
✗		Jede Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V induziert eine Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}$.
✗		Konvergiert das Newton-Verfahren, so ist die Konvergenz quadratisch.
	✗	Sind f, g uneigentlich integrierbar, so ist auch $f \cdot g$ uneigentlich integrierbar.
✗		Lipschitz-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig.
	✗	Ist eine Funktion stetig und differenzierbar, so ist sie auch stetig differenzierbar.
✗		Monotone Funktionen $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sind Regelfunktionen.
	✗	Sind $f_n, f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $n \in \mathbb{N}$ und gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so konvergiert $\int_a^b f_n(x)dx$ gegen $\int_a^b f(x)dx$.
✗		Beschränkte und monotone Folgen in $(CK(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ sind konvergent.
✗		Die Menge $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^4 + x - 10 > 0\}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
✗		Ein Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn $f'' \geq 0$.

Zu Aussage 4:
I ist beschränkt, jedoch nicht abgeschlossen. Dann ist $\|\cdot\|_\infty$ keine Norm auf $C(I,\mathbb{R})$.
Beispiel: $I=(0,1)$, für die Funktion $f\in C(I,\mathbb{R}), f(x)=1/x$ erhalten wir $\|f\|_\infty=\infty\notin\mathbb{R}$.

Teil II (Rechenaufgaben)

Aufgabe 1

Sei $a>0$. Dann ist

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln ax \,\mathrm{d}x = \ln a - 1$, Substitution $z=ax$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2x^2} = \frac{\pi}{2a}$, Substitution $z=ax$ und nutzen von $\displaystyle\int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{atan}(z)$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a}$, Substitution $z=1+ax$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-a^2x^2} = \frac{1}{2a}[\ln(1+ax)-\ln(1-ax)]+C$ mit $C\in\mathbb{R}$, Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2

Es sei $(f_n)_n$ die durch

$$f_n(x)=\frac{1}{n}e^{-x/n}\,,\quad x\in\mathbb{R}^+\,,\ n\in\mathbb{N}$$

definierte Funktionenfolge.

a) Untersuchen Sie $(f_n)_n$ auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad n\in\mathbb{N}\,.$

c) Kommentieren Sie die Ergebnisse aus a) und b) im Hinblick auf die Vertauschbarkeit von Grenzwerten.

Lösung.

a) Für jedes $x\in\mathbb{R}^+$ gilt $f_n(x)\to 0$ für $n\to\infty$, d.h., f_n konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion $f=0$. Die Folge f_n konvergiert sogar gleichmäßig, denn

$$\|f(x)-f_n(x)\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left|\frac{1}{n}e^{-x/n}-0\right| = \frac{1}{n},$$

und $(1/n)_n$ ist eine Nullfolge.

b) Uneigentliches Integral: $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{b\to\infty} e^{-x/n}\Big|_0^b = 1$, unabhängig von $n\in\mathbb{N}$.

c) Da f_n gleichmäßig konvergiert, sind Integral und Grenzwert für $n\to\infty$ auf kompakten Intervallen vertauschbar. Die (uneigentliche) Integration über ganz $\mathbb{R}^+$ ist ein weiterer Grenzwertprozess, der i.A. nicht mit dem Limes $n\to\infty$ vertauscht; tatsächlich ist

$$1=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty 0\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Aufgabe 3
Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-xk^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

auf Konvergenz.

Lösung. Wir untersuchen die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2 e^{-xk^2}$$

auf Konvergenz: Für $x \leq 0$ divergiert $f_n(x)$, weil die Reihenglieder keine Nullfolge bilden. Für $x \in [\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$, konvergiert f_n dagegen gleichmäßig, denn:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[\varepsilon,\infty)} |f(x) - f_n(x)| &= \sup_{x\in[\varepsilon,\infty)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-xk^2} - \sum_{k=1}^{n} k^2 e^{-xk^2} \right| \\
&= \sup_{x\in[\varepsilon,\infty)} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 e^{-xk^2} \right| \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 e^{-\varepsilon k^2}\,.
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist für $n \geq N(\varepsilon)$ von oben durch die Nullfolge

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

beschränkt, da die Exponentialfunktion schneller als jedes Polynom fällt. Das bedeutet:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 e^{-\varepsilon k^2} = 0\,.$$

Aufgabe 4
Stellen Sie ein geeignetes iteratives Verfahren auf, um $\sqrt{a}$ für $a \geq 0$ zu berechnen, und berechnen Sie damit $\sqrt{2}$ bis auf 10 Nachkommastellen genau.

(**Tipp:** Newton-Verfahren.)

Lösung. Wir wenden das Newton-Verfahren mit $f(x) = x^2 - a$ an. D.h. mit $f'(x) = 2x$ und allgemein $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, führen wir die folgende Iteration durch:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n}.$$

Im Speziellen ist $a = 2$, und wir wählen einen beliebigen Startwert, z.B. $x_0 = 1$. Für diesen Startwert finden wir Übereinstimmung mit $\sqrt{2}$ mindestens bis zur zehnten Nachkommastelle wenn $n \geq 4$. Für $x_0 = 10$ wird die gewünschte Genauigkeit hingegen erst für $n \geq 7$ erzielt.

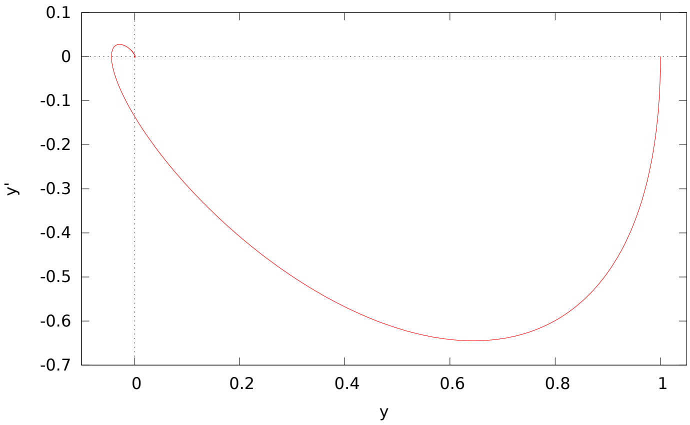

Abb. 1: Phasenportrait für $T = 10$

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0\,, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 0\,,$$

und zeichnen Sie das Phasenportrait, d.h., zeichnen Sie die Kurve $\{(y(t), y'(t)) \colon 0 \le t \le T\}$ in der Ebene für ein geeignet großes T.

(**Hinweis:** Verwenden Sie den allgemeinen Lösungsansatz $y(t) = Ae^{Bt}$ für $A, B \in \mathbb{C}$.)

Lösung. Setzen wir den Ansatz $y(t) = Ae^{Bt}$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel

$$(B^2 + 2B + 2)Ae^{Bt} = 0\,, \quad t \ge 0\,,$$

und das kann für $A \ne 0$ nur dann stimmen, wenn $B^2 + 2B + 2$ verschwindet. Die quadratische Gleichung $B^2+2B+2 = 0$ hat die beiden Lösungen $B_{1,2} = -1 \pm i$, und folglich hat die allgemeine Lösung der (linearen!) Differentialgleichung die Gestalt

$$y(t) = A_1 e^{(i-1)t} + A_2 e^{-(i+1)t}\,.$$

Die Vorfaktoren A_1 und A_2 lassen sich aus den beiden Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ mit

$$y(0) = A_1 + A_2 \quad \text{und} \quad y'(0) = i(A_1 - A_2) - (A_1 + A_2)$$

bestimmen. Beide Gleichungen sind erfüllt, wenn $A_{1,2} = (1 \mp i)/2$. Also ist die Lösung

$$y(t) = (\cos t + \sin t)e^{-t},$$

und die Ableitung $y'(t) = -2 \sin t\, e^{-t}$ (Phasenportrait: siehe Abb. 1).

Aufgabe 6
Bestimmen sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$x'(t) = -2x(t) + \exp(t)\,, \quad x(0) = x_0\,,$$

so dass in der Darstellung der Lösung kein Integral mehr auftritt. Wie muss $x_0 \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $x(t)$ an der Stelle $t = 1$ den Wert 0 annimmt?

Lösung. Am einfachsten geht es mit der Variation-der-Konstanten-Formel: Die Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(t) = \lambda z(t) + \phi(t)\,, \quad z(0) = z_0$$

ist durch

$$z(t) = e^{\lambda t} z_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \phi(s)\, ds$$

gegeben. Konkret:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t} x_0 + \int_0^t e^{-2t+3s} ds \\ &= e^{-2t} \left(x_0 - \frac{1}{3} \left(e^{3t} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Für die Bedingung $x(1) = 0$ muss $x_0 = (1 - e^3)/3$ sein. Fertig!

Hat man die VdK-Formel gerade nicht parat, lässt sich die Lösung auch wie folgt berechnen. Als erstes wird die Lösung der homogenen DGL $x' = -2x$ durch Trennung der Variablen berechnet: Umstellen der DGL nach $x^{-1}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -2$ ergibt (vgl. Substitionsregel)

$$\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = -2 \int\, \mathrm{d}t \quad \text{und damit} \quad \ln x = -2t + C_1,\ C_1 \text{ konstant.}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist damit $x(t) = Ae^{-2t}$ mit einer Konstanten $A \in \mathbb{R}^n$. Für die Lösung der inhomogenen DGL wenden wir Variation der Konstanten an: Wir setzen $x(t) = A(t)e^{-2t}$ in die Gleichung ein und erhalten damit eine DGL für $A = A(t)$:

$$A'(t) - 2A(t) = -2A(t) + e^{3t}.$$

Integration der Gleichung liefert $A(t) = \frac{1}{3} e^{3t} + C_2$ mit einer noch zu bestimmenden Integrationskonstante $C_2 \in \mathbb{R}^n$. Die allgemeine Lösung unserer DGL ist damit

$$x(t) = \frac{1}{3} e^t + C_2 e^{-2t}$$

ist. Um die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ zu erfüllen, muss $C_2 = x_0 - 1/3$ sein, und damit

$$x(t) = \frac{1}{3} \left(e^t - e^{-2t} \right) + x_0\, e^{-2t}.$$

Aufgabe 7

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit.

Lösung. Die Funktion ist partiell differenzierbar, denn für alle $h \in \mathbb{R}$ ist $f(h,0) = f(0,h) = 0$ und damit $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$. Jedoch ist f nicht stetig. Dies kann anhand der Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^+}$, gezeigt werden: Die Folge $(1/n, 1/n)_n$ konvergiert gegen den Punkt $(0,0)$ für $n \to \infty$. Der Funktionswert $f(1/n, 1/n) = n^2/4$ divergiert jedoch. Damit ist f weder stetig noch differenzierbar, aber partiell differenzierbar.

Teil III (Leichte Beweise)

Aufgabe 8
Es sei $K \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, auf dem eine differenzierbare Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ definiert sei, für die $\|f'\|_\infty < 1$ gelte. Zeigen Sie, dass f eine Kontraktion ist.

Lösung. Ohne Einschränkung sei $K := [a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Da f differenzierbar ist, können wir den Mittelwertsatz anwenden:

$$\exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Die Kontraktionsbedingung ist damit erfüllt,

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}|x - y| = |f'(\xi)|\,|x - y| \le \|f'\|_\infty\,|x - y| < |x - y|,$$

denn $\|f'\|_\infty < 1$ nach Voraussetzung.

Aufgabe 9
Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es eine Zahl $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)\,. \tag{1}$$

Veranschaulichen Sie die Aussage durch eine Zeichnung.

Lösung. Da die Funktion f stetig ist, ist sie auch integrierbar, und

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}(b - a).$$

Der Mittelwertsatz besagt nun, dass

$$\exists\, \zeta \in \left[\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\right] : \int_a^b f(x)dx = \zeta(b - a).$$

Laut Zwischenwertsatz existiert $\xi \in [a,b] : f(\xi) = \zeta$, folgt Gleichung (1).

Aufgabe 10
Es sei V der Vektorraum der integrablen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\,.$$

Ferner sei V_n der n-dimensionale Unterraum, der durch die paarweise orthonormalen Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aufgespannt werde. (Es gilt also $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}$.) Durch

$$P\colon V \to V_n\,, \quad (Pf)(x) = \sum_{k=1}^n \langle \varphi_k, f\rangle\, \varphi_k(x)$$

sei eine lineare Abbildung auf V definiert. Zeigen Sie, dass P die Bestapproximationseigenschaft

$$\|f - Pf\|_2 = \min_{g\in V_n} \|f - g\|_2$$

hat, wobei $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte 2-Norm auf V ist.

(**Hinweis:** Zeigen Sie, dass P die Orthogonalprojektion von V auf V_n ist.)

Lösung.
Achtung Korrektur: Die Bestapproximationseigenschaft bezieht sich auf Elemente aus dem Unterraum V_n, zu zeigen ist also

$$\|f - Pf\|_2 = \min_{g \in V_n} \|f - g\|_2. \tag{2}$$

Sei $f \in V, g \in V_n$. Zunächst zeigen wir, dass P die Orthogonalprojektion von V auf V_n ist, d.h. $\langle f - Pf, g \rangle = 0$. Für $g \in V_n$ existiert eine eindeutige Basisdarstellung

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k \varphi_k(x) \quad \text{mit } g_k \in \mathbb{R}.$$

Wir zeigen, dass P Orthogonalprojektion ist:

$$\begin{aligned}
\langle f - Pf, g \rangle = \left\langle f - Pf, \sum_{k=1}^{n} g_k \varphi_k \right\rangle &= \sum_{k=1}^{n} g_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, f \rangle \sum_{k=1}^{n} g_k \underbrace{\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle}_{\delta_{ik}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} g_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, f \rangle g_i = 0.
\end{aligned}$$

Für den Abstand erhalten wir

$$\|f - g\|^2 = \|f - Pf + Pf - g\|^2 = \|f - Pf\|^2 - 2\langle f - Pf, Pf - g \rangle + \|Pf - g\|^2,$$

und da $Pf - g \in V_n$ (weil $Pf, g \in V_n$) verschwindet das Skalarprodukt mit $f - Pf$, also

$$\|f - g\|^2 = \|f - Pf\|^2 + \|Pf - g\|^2.$$

Der minimale Abstand ist

$$\min_{g \in V_n} \|f - g\|^2 = \|f - Pf\|^2 + \min_{g \in V_n} \|Pf - g\|^2 = \|f - Pf\|^2,$$

damit ist Gleichung (2) gezeigt.