Analysis II (lehramtsbezogen): Rechnen mit Integralen

A. Papke

22. November 2013

1 Substitution

Wir wiederholen kurz die grundlegende Methode der Substitution und wenden sie im Beispiel an.

Satz 1.1 (Integration durch Substitution)**.** *Sei I ein reelles Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $z : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\int_a^b f(z(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{z(a)}^{z(b)} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

Das Integral einer Funktion kann also folgendermaßen umgeformt werden:

i) Wir lesen die Substitutionsformel (1) also von links nach rechts.
Wenn der Integrand das Produkt einer äußeren Funktion f und der Ableitung der inneren Funktion z ist, können wir das Integral auch als Integration von f über die innere Funktion ausführen (statt über die Variable x wird dann über die innere Funktion z integriert).

ii) Wir lesen (1) von rechts nach links.
Die Integrationsvariable z kann eine Funktion sein, die von x abhängt, also $z(x)$. Dann können wir statt über z auch über x integrieren, wenn wir dabei die Änderung von z in x berücksichtigen. Konkret heißt das, dass auch das Differenzial in x ausgedrückt werden muss:

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}(z(x)) = \frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = z'(x)\,\mathrm{d}x,$$

und so ersetzen wir im Schritt von rechts nach links das Differenzial und die Variable z mit der Funktion von x.

Weg i) bietet sich insbesondere bei der Integration von Brüchen an, wenn die Funktion im Zähler gerade die Ableitung der Funktion im Nenner ist (bis auf Vielfaches). Das heißt, wenn wir $\int_a^b \frac{c \cdot z'(x)}{z(x)}\,\mathrm{d}x$ für jedes konstante c berechnen wollen. Die Konstante kann aus dem Integral herausgezogen werden. Nach der Substitutionsregel vereinfacht sich das Integral also zu

$$\int_a^b \frac{c \cdot z'(x)}{z(x)}\,\mathrm{d}x = c \int_a^b \frac{z'(x)}{z(x)}\,\mathrm{d}x = c \int_{z(a)}^{z(b)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Beispiel 1.2 (Trivial). Ein einfaches Beispiel, das die beiden Richtungen i) und ii) verdeutlicht, ist die Integration von $\sqrt{x}$.

i) Wir identifizieren die Funktion und ihre Ableitung:

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x} \cdot 1\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x} \cdot \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{z}\,\mathrm{d}z.$$

Das Beispiel ist trivial mit $z(x) = x$ und vereinfacht die Integration nicht weiter. Das Integral des Polynoms ist direkt zu integrieren mit dem Ergebnis $\frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C$, wobei C eine Konstante ist (Im Fall des bestimmten Integrals ist C eindeutig bestimmt).

ii) Wir substituieren $z(x) = \sqrt{x}$. Das zugehörige Differenzial ist entsprechend $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, sodass auch $2z\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$ ist. Die Transformation von x nach z ist also

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int z \cdot 2z\,\mathrm{d}z = 2\int z^2\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}z^3 + C,$$

und weil wir als Ergebnis des Integrals über x auch ein Ergebnis erwarten, das von x abhängt, resubstituieren wir $z = \sqrt{x}$ und erhalten das Ergebnis des Integrals $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$:

$$\frac{2}{3}z^3 + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C.$$

Aufgabe 1.1.
Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ mit Substitution.

Lösung. Wenn wir die Nennerfunktion substituieren, also $z(x) = 1 + x^2$, erkennen wir, dass der Zähler ein Vielfaches von $z'(x) = 2x$ ist und Weg i) bietet sich an. Wir ersetzen $1 + x^2 = z(x)$ und $x = z'(x)/2$, sodass der Integrand

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{z'(x)/2}{z(x)} = \frac{1}{2}\frac{z'(x)}{z(x)}$$

ist. Die Grenzen sind $z(0) = 1$ und $z(1) = 2$. Das Integral ist also

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Aufgabe 1.2.
Zeigen Sie: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Lösung. Eine "standardmäßige" Substitution des Radikanden oder Potenzen davon führt nicht zu dem Ziel, dass sich das Integral vereinfacht. Stattdessen ist eine geschickte Integration zielführend. Wir erinnern uns, dass $\cos^2 z = 1 - \sin^2 z$ ist und die Ableitung von $\sin z$ gerade wieder $\cos z$ ist. Also kann die Substitution $x(z) = \sin z$ das Integral in die Form der linken Seite von (1) bringen (also gehen wir Weg ii)).
Wir substituieren $x(z) = \sin z$, und mit $x'(z) = \cos z$ bekommen wir

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 z}\cos z\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \cos^2 z\,\mathrm{d}z. \tag{2}$$

Die Grenzen sind entsprechend $\arcsin(0) = 0$ und $\arcsin(1) = \pi/2$. Dieses Integral können wir auch mit partieller Integration weiter behandeln. An dieser Stelle benutzen wir jedoch die trigonometrische Beziehung $\cos^2 z = \dfrac{\cos 2z + 1}{2}$ und substituieren weiter, $u(z) = 2z$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^2 z\,\mathrm{d}z &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2z + 1}{2}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}z + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2z}{2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3.
Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x$.

Lösung. Wir substituieren mit $z(x) = x^2 + 1$, und wissen $z'(x) = 2x$, sodass:

$$\int_0^{\pi} x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cos(z(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{\pi^2+1} \cos(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(\sin(\pi^2+1) - \sin(1)).$$

2 Partialbruchzerlegung

Wir beschränken uns hier auf Integrale über Funktionen, die nur reelle Nullstellen haben und in Linearfaktoren zerfallen. Diese Funktionen lassen sind eindeutig darstellen:

Korollar 2.1. *Sei $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine rationale Funktion ohne komplexe Polstellen mit n verschiedenen reellen Polstellen x_j, die die Ordnung m_j haben. Jede dieser Funktionen R kann mit einer Polynomfunktion $P(x)$ und $a_{jk} \in \mathbb{R}$ eindeutig dargestellt werden als*

$$R(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k}.$$

Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, dass die Stammfunktion von Polynomen und $(x - x_j)^{-k}$ leicht bestimmt werden kann und jede Funktion, die die Voraussetzungen erfüllt, so einfach integriert werden kann.

2.1 Einfache Polstellen

Wir zeigen ein Beispiel für $n = 2$ und $m_1 = 1, m_2 = 1$.

Aufgabe 2.1.
Berechnen Sie $\int \frac{1}{1 - x^2} \, \mathrm{d}x$ für $|x| < 1$.

Lösung. Der Nenner zerfällt in reelle Linearfaktoren $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$. Wir suchen also die eindeutig bestimmten Konstanten a_{11}, a_{22} sodass

$$\frac{1}{x^2} = \frac{a_{11}}{1 + x} + \frac{a_{22}}{1 - x},$$

und erhalten die Bedingung $1 = a_{11} + a_{22} + x(a_{22} - a_{11})$, sodass $a_{11} = a_{22} = 1/2$ dies erfüllt. Das Integral ist dann

$$\int \frac{1}{1 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \right) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\ln(1 + x) - \ln(1 - x)] + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + C.$$

Das entspricht $\operatorname{arctanh}(x)$. Die Bedingung $|x| < 1$ garantiert ein reelles Ergebnis für das zweite Integral.

2.2 Mehrfache Polstellen

In diesem Beispiel ist $n = 1$ und $m_1 = 2$.
Wir berechnen $\int \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} \, \mathrm{d}x$. Der Grad der Zählerfunktion ist kleiner als der Grad der Nennerfunktion, und 1 ist eine Polstelle. Nach vorangegangenem Korollar finden wir für den Integranden eindeutig bestimmte Konstanten a_{11}, a_{12}, sodass

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{a_{11}}{x - 1} + \frac{a_{12}}{(x - 1)^2}.$$

Die Gleichung gibt $2x - 1 = a_{11}x - a_{11} + a_{12}$, und Koeffizientenvergleich liefert $a_{11} = 2$ und $a_{12} = 1$. Das Integral ist dann

$$\int \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{2}{x - 1} \, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x - 1)^2} \, \mathrm{d}x = 2 \ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1} + C.$$

3 Partielle Integration

Satz 3.1. *Seien f, g zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3.1.
Berechnen Sie das Integral aus (2) mit Hilfe von partieller Integration.

Lösung.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, \mathrm{d}z = \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin(0)\cos(0) + \int_0^{\pi/2} \sin^2 z \, \mathrm{d}z,$$

die Identität $1 = \sin^2 z + \cos^2 z$ wird im letzten Integral eingesetzt,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, \mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 z\right) \, \mathrm{d}z,$$

und das Integral über $\cos z$ auf die linke Seite gebracht:

$$2\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, \mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2},$$

sodass letztendlich

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 z \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}.$$

4 Fubini

Der Satz von Fubini für Riemann-Integrale besagt, dass die Integrationsreihenfolge für eine Funktion, die auf kompakten Intervallen definiert und in jeder Komponente stetig ist, vertauscht werden kann.

4.1 Beispiel

Sei $f : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^2$. Dann ist

$$\int_0^1 \int_0^2 f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^1 f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

weil

$$\int_0^1 \int_0^2 xy^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot \frac{8}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3},$$

und

$$\int_0^2 \int_0^1 xy^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \int_0^2 \frac{1}{2} y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{4}{3}.$$

4.2 Physikalisches Beispiel

Wir berechnen Volumenintegrale $\int \mathrm{d}V$.

Aufgabe 4.1.
Berechnen Sie die Fläche eines Kreises mit Radius R. Benutzen Sie die Funktionaldeterminante der Transformation in Polarkoordinaten, $Jf(r,\phi) = r$, die das Volumenelement $\mathrm{d}V = Jf(r,\phi) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi$ liefert. Zeigen Sie insbesondere, dass die Reihenfolge der Integration keine Rolle spielt.

Tipp: Gesucht ist das Ergebnis des Integrals $\int_0^{2\pi} \int_0^R r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi$.

Lösung.

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B_2(0,R)) &= \int_{B_2(0,R)} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^R Jf(r,\phi)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi, \quad \text{was direkt} \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\ \mathrm{d}\phi = \frac{R^2}{2}2\pi = \pi R^2 \quad \text{ist, und mit Fubini} \\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi} r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi r\ \mathrm{d}r = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2.
Berechnen Sie das Volumen einer Kugel. Benutzen Sie die Funktionaldeterminante der Transformation in Kugelkoordinaten $Jf(r,\phi,\theta) = r^2\sin\theta$, die das Volumenelement $\mathrm{d}V = Jf(r,\phi,\theta)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta$ liefert. Zeigen Sie insbesondere, dass das Ergebnis von der Reihenfolge der Integration unabhängig ist.

Tipp: Gesucht ist das Ergebnis des Integrals $\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta$.

Lösung.

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B_3(0,R)) &= \int_{B_3(0,R)} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R Jf(r,\phi,\theta)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{R^3}{3}\sin\theta\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi 2\pi\frac{R^3}{3}\sin\theta\ \mathrm{d}\theta = 4\pi\frac{R^3}{3}\end{aligned}$$

Die Reihenfolge aller drei Integrale kann beliebig vertauscht werden, da der Satz von Fubini anwendbar ist.

5 Aufgaben

Ein paar Aufgaben mit Lösungen. Zeigen Sie:

1. $\int \sin^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$
2. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \tan x + C$
3. $\int \frac{1+x}{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \ln(x-1) + C$
4. $\int \frac{x+1}{x-1}\ \mathrm{d}x = x + 2\ln(x-1) + C$
5. $\int \cos\ln(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x(\sin\ln x + \cos\ln x + C$
6. $\int_1^3 \frac{x^2}{x^3+2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\frac{29}{3}$
7. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x-3}\ \mathrm{d}x = -\frac{\ln 3}{4}$
8. $\int_{-1}^0 \frac{2}{2x^2+5x-3}\ \mathrm{d}x \approx -0.43$