Wiederholung für Analysis II (lehramtsbezogen): Potenz- und Taylorreihen

A. Papke

1. November 2013

1 Potenzreihen

Definition 1.1 (Potenzreihe [1]). *Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-p)^n \tag{1}$$

Potenzreihe mit einer Folge $(a_n)_n$ von Koeffizienten a_n und Entwicklungspunkt p im Punkt x.

Definition 1.2 (Konvergenzradius). *Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe ist definiert als*

$$r := \sup \left\{ |x-p| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-p)^n \text{ konvergiert} \right\}. \tag{2}$$

Anschaulich gesprochen ist es der maximale Abstand zum Entwicklungspunkt, innerhalb dessen die Reihe noch konvergiert.

Satz 1.3 (Berechnung des Konvergenzradius [1]). *Die Konventionen "$1/0 = \infty$" und "$1/\infty = 0$" werden benutzt um den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zu berechnen nach Cauchy-Hadamard:*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)}. \tag{3a}$$

Ist $a_n \neq 0$ für alle n und existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, so ist der Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{3b}$$

Existiert der Grenzwert nicht, so ist die vorangegangene Formel nicht anwendbar. Beispiel: für die Reihe mit den Koeffizienten $a_{2n} = 1,\ a_{2n+1} = 1/n$ existiert der Grenzwert nach (3b) nicht. Cauchy-Hadamard (3a) dagegen liefert den Konvergenzradius 1. Die Formel von Cauchy-Hadamard ist immer anwendbar.

Beispiel 1.4 (Geometrische Reihe). Gegeben sei für $a_0 \neq 0$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n.$$

Was ist hier der Entwicklungspunkt? Und der Konvergenzradius?
Der Entwicklungspunkt ist $p = 0$, die Koeffizientenfolge ist $(a_0)_n$ und der Konvergenzradius ist $r = 1$. Denn: $r = \lim_{n\to\infty} |a_0/a_0| = 1$. Mit Cauchy-Hadamard: der Nenner in (3a) ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_0|} \right) = 1$ und damit

auch $r = 1$.
Bekannt ist dieses Ergebnis auch von der geometrischen Reihe, die für $|q| < 1$ konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Definition 1.5 (Bezug zu Folgen)**.** *Die Folge $(s_N)_N$ der Partialsummen ist definiert als*

$$s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (x-p)^n. \tag{4}$$

Das Glied s_i heißt i-te Partialsumme. Existiert ihr Grenzwert, $\lim\limits_{N\to\infty} s_N(x)$, konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-p)^n$.

Satz 1.6 (gliedweises Differenzieren [1])**.** *Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann ist die Reihe für alle $x \in (-r, r)$ differenzierbar und es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad \text{für alle } x \in (-r, r).$$

Das Vertauschen von Grenzwerten ist möglich, wenn diese existieren. Die Potenzreihe konvergiert innerhalb ihres Konvergenzradius', also für den gewählten Bereich $x \in (-r, r)$, und die Summenglieder selbst sind Polynome und damit differenzierbar.
Beispiel 1.7 (Differenzierbarkeit). Die Reihendarstellung der trigonometrischen Funktionen

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \tag{5a}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \tag{5b}$$

soll als Beispiel dienen.

1. Konvergenzradius. Zunächst wird die jeweilige Reihendarstellung mit der in Satz 1.3 allgemeinen Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ verglichen, um die Koeffizienten a_n zu bestimmen. Wir finden:

$$\text{für } \sin(x): \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad \text{für } \cos(x): \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

   Somit muss Cauchy-Hadamard (3a) benutzt werden. Es ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \limsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\right) = 0$, weil im Nenner "die Fakultät schneller wächst als die Wurzelfunktion sie minimiert", und wir finden $r = \infty$ für $\sin(x)$ als auch $\cos(x)$.
   Genauer: Für die Berechnung von r benötigen wir das Grenzwertverhalten von $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$. Dazu finden wir eine untere Schranke für $n!$ und zeigen, dass der Ausdruck auch hierfür divergiert.
   Wir zeigen, dass $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$. Es ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Sei k die Anzahl der Faktoren von $n!$ die größer sind als $\frac{n}{2}$. Per Konstruktion ist dann $k > \frac{n}{2}$, denn die Fakultät beinhaltet n Faktoren. Das Produkt der k Faktoren, die mindestens $\frac{n}{2}$ groß sind, ist damit nach unten beschränkt von $\left(\frac{n}{2}\right)^k$. Dann ist erst recht $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^k$, und da $k > \frac{n}{2}$ auch $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$.
   Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} > \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} \to \infty$. Folglicherweise ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\right) = 0$ und $r = \infty$.

2. Differenzierbarkeit. Wir haben zuvor gezeigt, dass die Potenzreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren. Somit sind sie auch auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(2n+1)\,x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\;x^{2n} = \cos(x),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\;x^{2n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\;2n\,x^{2n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\;x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\;x^{2n+1} = -\sin(x),\end{aligned}$$

im vorletzten Schritt wurde eine Indexverschiebung vorgenommen.

2 Taylorreihen

Definition 2.1 (Taylorreihe)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die unendlich oft in I differenzierbar ist und $p \in I$. Dann heisst die Potenzreihe*

$$\begin{aligned}T_pf(x) &= f(p)+\frac{f'(p)}{1!}(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n \qquad \text{(6a)}\end{aligned}$$

Taylorreihe, und

$$T_p^nf(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k \qquad \text{(6b)}$$

das nte Taylorpolynom.

Einfachstes Beispiel für f: Polynome. Sie sind unendlich oft differenzierbar.

Definition 2.2 (Lagrangesches Restglied)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $p \in I$. Dann gibt es für alle $x \in I \setminus \{p\}$ ein ξ zwischen p und x mit*

$$f(x) = T_p^nf(x)+R_n(x), \qquad \text{(7a)}$$

wobei das Restglied definiert ist als

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}. \qquad \text{(7b)}$$

Korollar 2.3. *Liegt das Intervall $(p-r, p+r)$ in I und gilt $|f^{(n+1)}(x)| \le M_n$ für alle $x \in (p-r, p+r)$, so gilt für das Restglied die Abschätzung*

$$|R_n(x)| \le M_n\frac{|x-p|^{n+1}}{(n+1)!} \le M_n\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{x\to p}\frac{R_n(x)}{(x-p)^n} = 0$$

Je näher x bei p liegt, desto besser approximiert also das Taylorpolynom $T_p^nf(x)$ an der Stelle x die Funktion f.

Beispiel 2.4 (Restglied Abschätzung). Wir entwickeln $\sin(x)$ in $n$ter Ordnung um 0, sodass $\sin(x) = T_0^n \sin(x) + R_n(x)$ ist. Da der Sinus und seine Ableitungen nach oben von 1 beschraenkt sind, lässt sich das Restglied wie zuvor abschätzen:

$$|R_n(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Je näher x an 0 ist, umso kleiner das Restglied. Ebenfalls gilt, dass je größer n ist, also die Ordnung bis zu der wir die Funktion entwickeln, desto genauer wird auch die Approximation.

Satz 2.5 (Nicht entwickelbare Funktionen [1]). *Es gibt eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

1. *Die Taylorreihe $T_0 f$ von f konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$, und*
2. *$f(x) \neq T_0 f(x)$ fuer alle $x \neq 0$.*

Insbesondere laesst sich f also in keiner Umgebung $(-\varepsilon, \varepsilon)$ von Null in eine Potenzreihe entwickeln.

Nicht jede glatte Funktion lässt sich in eine Taylorreihe entwickeln.

Beispiel 2.6. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

ist glatt und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Taylorreihe konvergiert also überall gegen 0, stimmt aber nur im Nullpunkt mit f überein. Außer an der Stelle 0 wird die Funktion niemals 0.

Literatur

[1] O. Deiser, *Analysis 1*, Mathematik für das Lehramt. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011