Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, A. Papke

Probeklausur Analysis II
im WS 2013/2014

Teil I (Basiswissen)

Sofern nichts anderes angegeben ist, beziehen sich die Aussagen stets auf die natürliche Metrik $d(x, y) = |x - y|$ bzw. den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

wahr	falsch	Aussage
		Jede lineare Funktion $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lässt sich in Form eines Skalarproduktes als $l(x) = \langle \alpha, x \rangle$ darstellen, wobei $\alpha \in \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmt ist.
		Konvergiert eine Folge $(f_n)_n$ differenzierbarer Funktionen $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, so ist f differenzierbar.
		Ist die Funktion f auf $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
		Die Stammfunktion einer Funktion $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ ist eindeutig bestimmt.
		Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, so hat f in K genau einen Fixpunkt.
		Die Hessematrix einer konvexen Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist positiv semidefinit.
		Die stetige Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei in der zweiten Variable Lipschitz-stetig. Damit ist das AWP $y'(x) = f(x, y(x)),\ y(a) = y_0$ eindeutig lösbar.
		Jede konvergente Folge in $(CK(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist eine Cauchyfolge.
		Regelfunktionen haben nur endlich viele Unstetigkeitsstellen.
		Sind die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, auf $\mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar, so ist auch $\lambda f + \mu g$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar.
		Stückweise stetige Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ lassen sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren.

Teil II (Rechenaufgaben)
Bearbeiten Sie **genau** drei der folgenden Aufgaben 1-4. Bitte machen Sie kenntlich, für welche Aufgaben Sie sich entschieden haben.

Aufgabe 1
Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$x'(t) = \ln(t)\,x(t), \quad x(1) = x_0\,,$$

Welchen Wert muss $x_0 \in \mathbb{R}$ haben, damit $x(t)$ zur Zeit $t = 2$ den Wert 1 annimmt?

Aufgabe 3
Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & y > 0, \\ x, & y = 0, \\ -\sqrt{x^2+y^2}, & y < 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass jede Richtungsableitung von f in $(0,0)$ existiert.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung an $(0,0)$ in Richtung $v = (4,-3)$.

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der Kreisscheibe

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die lokalen Extrema von f im Innern von K, und dann auf dem Rand (d.h. mit Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$).

Teil III (Beweise)

Aufgabe 5

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = a(t)y(t), \quad y(0) = y_0$$

für eine gegebene stetige Funktion $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$y(t) = y_0 \exp\left\{ \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s \right\}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems für alle $t \in [0, T]$ ist.

Aufgabe 6

Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a)\,.$$