Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

Musterlösung zur Nachklausur
Stochastik I im WiSe 2014/2015

Teil I

Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr " oder „falsch" sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch oder nicht angekreuzte Aussage erhalten Sie 0 Punkte.

wahr	falsch	Aussage
x		Fast sichere Konvergenz impliziert Konvergenz in Verteilung.
x		Für eine Verteilungsfunktion gilt stets $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
x		Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ gibt es stets eine Menge $E \in \mathcal{E}$ mit $\mathbb{P}(E) \geq 0.9$.
x		Jede σ-Algebra ist durchschnittsstabil.
x		Gemeinsam normalverteilte Zufallsvariable sind genau dann unabhängig, wenn sie unkorreliert sind.
	x	Für eine normalverteilte Zufallsvariable X gilt stets $\mathbb{P}(X \in (-a, 0]) = \mathbb{P}(X \in [0, a))$.
x		Der Erwartungswert einer reellen Zufallsvariablen, die nur negative Werte annimmt, ist stets negativ.
	x	Für zwei reelle Zufallsvariable X, Y gilt stets $\mathrm{Var}(XY) = \mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)$.
	x	Für exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 2$ gilt $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$.
	x	Aus $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$ folgt $\mathbb{P}(A\|B) < \mathbb{P}(B\|A)$.

Teil II

Bearbeiten Sie alle der folgenden Aufgaben. Begründen Sie alle Ihre Lösungswege.

Aufgabe 1 (Punkte)
In einer Urne befinden sich fünf Kugeln, die mit den Ziffern $1, 2, 3, 4, 5$ durchnummeriert sind. Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen, und die beiden Ergebnisse werden der Reihenfolge nach notiert.

a) Geben Sie einen geeigneten Stichprobenraum Ω an. Wie viele Elementarereignisse enthält Ω (d.h., was ist $|\Omega|$)? Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω?

b) Es sei A das Ereignis, dass die Summe der beiden Ergebnisse mindestens 9 beträgt. Geben Sie die kleinste σ-Algebra auf Ω an, die A enthält, und berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$.

c) Es sei B das Ereignis, dass zweimal dieselbe Kugel gezogen wird, und χ_B die charakteristische Funktion von B, d.h.

$$\chi_B(\omega) = \begin{cases} 1 & : \quad \omega \in B \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(\chi_B)$.

Lösung:
a) Wähle
$$\Omega = \{(k, l) : \, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$
Es gilt $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$ und $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^{25} \approx 33.6\,\text{Mio.}$
b) Es ist
$$A = \{(5, 5), (4, 5), (5, 4)\}$$
und
$$\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$$
sowie
$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{25} = 12\%.$$
c) Es ist
$$\mathbb{E}(\chi_B) = 1 \cdot \mathbb{P}(\chi_B = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(\chi_B = 0) = \mathbb{P}(\chi_B = 1) = \mathbb{P}(B) = \frac{5}{25},$$
da $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

Aufgabe 2 (Punkte)
Es sei X eine reelle Zufallsvariable mit Werten in $[0, 1]$. Die Verteilung von X sei durch das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ gegeben, wobei $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(X \in (a, b]) = k \cdot (b - a)$ für $0 \le a \le b \le 1$ und ein geeignetes $k \in \mathbb{R}$.

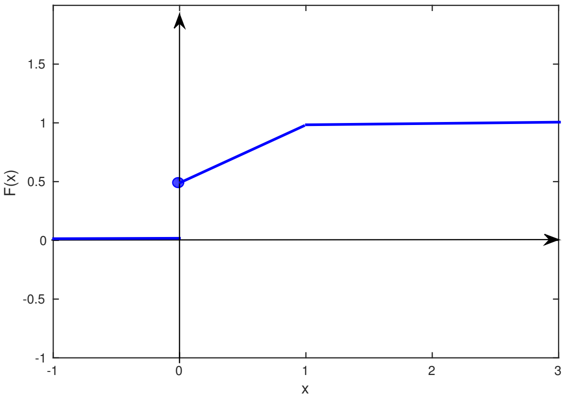
a) Bestimmen Sie den Parameter $k \in \mathbb{R}$.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion F_X von X auf ganz $\mathbb{R}$ an und skizzieren Sie diese.

Lösung:
a) Da $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, muss $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1$ gelten. Hier gilt $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X \in (0,1]) = \frac{1}{2} + k \cdot 1$, und somit folgt $\frac{1}{2} + k \cdot 1 = 1$, also $k = \frac{1}{2}$.
b) Es ist

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & : \quad -\infty < x < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & : \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & : \quad 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Zeichnung:



Aufgabe 3 (Punkte)
Zu einer Feier werden 105 Gäste eingeladen, obwohl nur 100 Sitzplätze vorhanden sind. Dabei geht der Gastgeber davon aus, dass die Gäste unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.1$ nicht erscheinen. Man betrachte als Zufallsvariable X die Anzahl der erscheinenden Gäste.

a) Wie ist X verteilt? Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(X = k)$ an, wobei $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Berechnen Sie approximativ (mit Begründung) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jeder Gast einen Sitzplatz bekommt.

Lösung:
a) X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 105$ und $p = 0.9$, d.h.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{105}{k} 0.9^k 0.1^{105-k}.$$

b) Gesucht ist eine Approximation für $\mathbb{P}(X \leq 100)$. Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass X als Summe von unabhängig bernoulliverteilten Zufallsvariablen annähernd normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu = 105 \cdot 0.9 = 94.5$ und Varianz $\sigma^2 = 105 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 9.45$. Damit ist

$$\mathbb{P}(X \leq 100) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{100 - 94.5}{3.074}\right) \approx \mathbb{P}(Y \leq 1.789) \approx 0.9633$$

wobei $Y \sim N(0,1)$, d.h., die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt annähernd 96%.
Die Poisson-Approximation eignet sich nicht, da $p = 0.1$ nicht klein genug ist.

Aufgabe 4 (Punkte)
In einer Urne befinden sich $N \in \mathbb{N}$ Lose, die mit den Zahlen $1, ..., N$ durchnummeriert sind. Die Anzahl N der Lose ist nicht bekannt und soll geschätzt werden. Es werden $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Stichproben $X_1, ..., X_n$ genommen. Jede der Stichproben ist gleichverteilt auf $\{1, ..., N\}$.

a) Es sei $n = 1$, d.h. es wird nur eine Stichprobe genommen, und $X_1 = x$ das Ergebnis dieser Stichprobe. Zeigen Sie, dass der Schätzer $T(x) = x$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer für die Anzahl N der Lose ist.

b) Es sei allgemein $n \in \mathbb{N}$ und $T_n(x_1, ..., x_n) = \max(x_1, ..., x_n)$. Zeigen Sie, dass T_n konsistent ist.

Lösung:
a) Im Falle $n = 1$ ist die Likelihood-Funktion für $N \in \mathbb{N}$ durch

$$L(N|x) = \mathbb{P}_N(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & : \quad 1 \le x \le N, \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert. Für gegebenes x ist diese Funktion maximal bei $N = x$, denn für $N < x$ ist sie Null und für $N \ge x$ ist sie monoton fallend in N.
b) Damit der Schätzer konsistent ist, muss $T_n \xrightarrow{\text{i.W}} N$ für alle N gelten, also $\mathbb{P}_N(|T_n - N| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_N(|T_n - N| > \varepsilon) &= \mathbb{P}_N(|\max(X_1, ..., X_n) - N| > \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}_N(\max(X_1, ..., X_n) < N - \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}_N(X_1 < N - \varepsilon, ..., X_n < N - \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}_N(X_1 < N - \varepsilon) \cdot ... \cdot \mathbb{P}_N(X_n < N - \varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}_N(X_1 < N) \cdot ... \cdot \mathbb{P}_N(X_n < N) \\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

wobei im 4. Schritt die Unabhängigkeit der Stichproben verwendet wurde.

Ende der Klausuraufgaben