

Probeklausur zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2014/2015

Teil I

Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch oder nicht angekreuzte Aussage erhalten Sie 0 Punkte.

wahr	falsch	Aussage
		Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen kann maximal endlich viele Unstetigkeitsstellen haben.
		Für jede Folge von unabhängigen, identisch verteilten, integrierbaren Zufallsvariablen gilt das schwache Gesetz der großen Zahlen.
		Die Vereinigung von zwei σ -Algebren ist wieder eine σ -Algebra.
		Wenn A und B unabhängige Ereignisse sind, dann gilt $\mathbb{P}(A B) = \mathbb{P}(A)$.
		Eine reelle Zufallsvariable mit negativem Erwartungswert nimmt nur negative Werte an.
		Für zwei reelle Zufallsvariable X, Y gilt $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.
		Für eine reelle Zufallsvariable X gilt stets $\text{cov}(X, X) \geq 0$.
		Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf \mathbb{R} gibt es eine beschränkte Menge mit $\mathbb{P}(E) > 0.99$.
		Aus $\mathbb{E}(X) < \infty$ folgt $\mathbb{E}(X^2) < \infty$.
		Es gilt $X_n \rightarrow X$ in Wahrscheinlichkeit genau dann, wenn $ X - X_n \rightarrow 0$ in Wahrscheinlichkeit.

Teil II

1. Aufgabe (2+4=6 Punkte)

Auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ mit der Gleichverteilung betrachte man die Zufallsvariablen

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in \{2\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Prüfen Sie, ob X und Y unabhängig sind.
- Sei $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω . Finden Sie drei verschiedene Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{E}$, für die gilt: A und B sind unabhängig, B und C sind unabhängig, aber A und C sind nicht unabhängig. D.h., die Eigenschaft der Unabhängigkeit ist nicht transitiv.

2. Aufgabe (2+2+2=6 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable, deren Dichte f für $a \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + ax & : x \in [0, 1] \\ 0 & : x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1] \end{cases}$$

gegeben ist.

- Bestimmen Sie a .
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .
- Es sei $Y = \chi_{\{X \leq 1\}}$. Berechnen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von Y .

3. Aufgabe (2+4=6 Punkte)

Seien X_1, X_2, \dots unabhängige Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.

- Bestimmen Sie Y so, dass $X_n \xrightarrow{\text{i.W.}} Y$ gilt.
- Zeigen Sie, dass auch $X_n \xrightarrow{\text{i.V.}} Y$ für das in a) gewählte Y gilt. Verwenden Sie dabei nicht das Ergebnis aus a), sondern direkt die Definition von Konvergenz in Verteilung.

4. Aufgabe (3+3=6 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei poissonverteilt zum Parameter $\lambda > 0$, d.h., es ist $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ für $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Dabei ist λ unbekannt und soll durch k unabhängige Messungen X_1, \dots, X_k geschätzt werden. Wir wählen den Schätzer

$$T_k = T(X_1, \dots, X_k) = \frac{X_1 + \dots + X_k}{k}.$$

- Untersuchen Sie den Schätzer T_k auf Erwartungstreue und Konsistenz.
- Angenommen der wahre Wert ist $\lambda = 4$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10.000 Messungen diesen Wert bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 0.05$ genau zu schätzen? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit entweder approximativ mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes oder schätzen Sie sie mithilfe der Tschebyschev-Ungleichung ab. (Sie können sich einen der beiden Lösungswege aussuchen!)
Eine Tabelle zur Standardnormalverteilung finden Sie im Anhang auf Seite 3.

Ende der Klausuraufgaben

Anhang: Tabelle zur Standardnormalverteilung

Beispiel: $\mathbb{P}(X \leq 1.16) = 0.8770$ für $X \sim N(0, 1)$

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998