Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

10. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis Freitag, 23. Januar 2015, 12 Uhr

1. Aufgabe (Parameterschätzung I, 4 Punkte)
In einer Urne sind $N \geq 2$ Lose mit den Nummern $1, ..., N$, wobei N unbekannt ist. Es wird $n \leq N$ mal ohne Zurücklegen gezogen mit den Ergebnissen $x_1, ..., x_n$.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T für N.

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}_N(T)$ und konstruieren Sie daraus einen erwartungstreuen Schätzer T^* für N.
Tipp: Sie können Aufgabe 3 vom 4. Übungszettel und die Formel $\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$ *verwenden.*

2. Aufgabe (Parameterschätzung II, 4 Punkte)
Anhand von n unabhängigen Stichproben $x_1, ..., x_n$ soll die Varianz einer Zufallsvariable mit unbekannter Verteilung und unbekanntem Erwartungswert geschätzt werden. Vorausgesetzt wird nur, dass Erwartungswert und Varianz existieren. Konstruieren Sie einen erwartungstreuen Schätzer für die Varianz.

3. Aufgabe (Konfidenzintervall, 4 Punkte)
Bei einer Prüfung mit Notenvergabe $1, 2, 3, 4, 5$ gibt es eine gewisse (unbekannte) Verteilung $\mathbb{P}(X = i) = p_i$, $i = 1, ..., 5$. Es soll $\mathbb{E}(X)$ geschätzt werden, wobei bekannt ist, dass $\mathrm{Var}(X) \leq 0.5$ gilt. Bei einer Prüfung von 25 unabhängigen Kandidaten entsteht folgender Notenspiegel:

1	2	3	4	5
2	7	4	6	6

Konstruieren Sie mithilfe der Tschebyschev-Ungleichung ein Konfidenzintervall für $\mathbb{E}(X)$ um den Mittelwert $\bar{X}$ zum Niveau $\alpha = 0.25$. Ist der Wert $\mathbb{E}(X) = 3$ noch plausibel?

4. Aufgabe (Hypothesentest, 4 Punkte)
Es werden n unabhängige Stichproben $x_1, ..., x_n$ aus der Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \nu]$ ($\nu > 0$) gezogen. Dabei soll der Test ϕ mit H_0: $\nu = 1$ gegen H_1: $\nu \neq 1$ durchgeführt werden, wobei der Annahmebereich als $A = \{(x_1, ..., x_n) : \frac{1}{2} < \max(x_1, ..., x_n) \leq 1\}$ festgelegt wird. Stellen Sie die Gütefunktion $G_\phi(\nu)$ auf. Welches Niveau hat der Test?

Bonusaufgabe
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ und X eine Zufallsvariable auf $\mathbb{R}$ mit Dichte f. Gilt für jede stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ und $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existieren,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X)),$$

so folgt $F_n(x) \to F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ für die zugehörigen Verteilungsfunktionen.