Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

2. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2013/2014

Abgabe bis Freitag, 7.11.14, 12 Uhr

1. Aufgabe (σ-Algebren, 4 Punkte)
Es seien $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ zwei σ-Algebren auf einer Grundmenge Ω. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Die Vereinigung $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ ist wieder eine σ-Algebra.

b) Der Schnitt $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ist wieder eine σ-Algebra.

2. Aufgabe (Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, 4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sowie $A, B \in \mathcal{E}$ mit $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$$

und geben Sie jeweils an, in welchem Fall Gleichheit gilt. Finden Sie analoge Schranken für $A \cup B$.

3. Aufgabe (Diskrete Verteilungen, 4 Punkte)
In einer Urne mit $N = 6$ Kugeln seien $r = 2$ rote und $N - r = 4$ weiße Kugeln. Es werden $n = 5$ Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau $k = 3$ rote Kugeln gezogen werden.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, k rote Kugeln zu ziehen, durch die Binomialverteilung gegeben ist und bestimmen Sie die entsprechenden Parameter.

4. Aufgabe (Wartezeiten, 4 Punkte)
Beim Betreten eines Bäckerladens sei mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ kein anderer Kunde anwesend, sodass Sie sofort bedient werden. Sind jedoch bereits andere Kunden vor Ort, sei die Wartezeit gemäß der Dichtefunktion $f(x) = \frac{3}{4}\lambda e^{-\lambda x}$, $x \in (0, \infty)$, $\lambda > 0$, verteilt.

a) Beschreiben Sie den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$: Geben Sie für die Werte der betrachteten Wartezeit eine geeignete Grundmenge Ω an, wählen Sie eine passende σ-Algebra und definieren Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, das die oben beschriebenen Eigenschaften erfüllt.

b) Bestimmen und zeichnen Sie die entsprechende Verteilungsfunktion.

c) Berechnen Sie für $\lambda = 0.2$ die Wahrscheinlichkeit, dass Sie maximal fünf Minuten warten müssen.