Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

3. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2014/2015

Abgabe bis Freitag, 14.11.14, 12 Uhr

1. Aufgabe (Bedingte Wahrscheinlichkeiten, 4 Punkte)
In der Großgemeinde Kleinbach herrscht an 25% aller Tage Sonnenschein, an 50% aller Tage ist der Himmel bewölkt und an 25% aller Tage regnet es unaufhörlich. Franz Knolau schaut jeden Morgen, bevor er das Haus verlässt, nach dem Wetter. Wenn es regnet, nimmt er seinen Schirm mit Wahrscheinlichkeit 0,9 mit (er ist offensichtlich vergesslich), bei bewölktem Himmel mit Wahrscheinlichkeit 0,5 (er ist unentschlossen) und bei Sonnenschein mit Wahrscheinlichkeit 0,2 (er ist Pessimist).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Knolau den Schirm zu Hause lässt?

b) Wenn Herr Knolau morgens mit dem Schirm das Haus verlässt, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?

2. Aufgabe (Unabhängigkeit, 4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie

a) Sind A, B unabhängig, so auch A, B^c.

b) Sind A, B, C unabhängig, so auch $A \cup B$, C.

3. Aufgabe (Stetige Gleichverteilung, Verteilungs- und Dichtefunktionen, 4 Punkte)
Ein Laserpointer ist im Abstand 30cm über dem Nullpunkt der Zahlengeraden angebracht und strahlt zufällig gleichverteilt in alle Richtungen, die die Gerade treffen. Es sei x der Abstand zwischen Treffpunkt und Nullpunkt. Berechnen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichtefuntion für x.

4. Aufgabe (Normalverteilung, 4 Punkte)
Zur Erinnerung: Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist gegeben durch

$$F_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dt.$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gilt $\mathbb{P}_{\mu,\sigma^2}([a,b]) = F_{\mu,\sigma^2}(b) - F_{\mu,\sigma^2}(a)$.

a) Stellen Sie $\mathbb{P}_{\mu,\sigma^2}$ (für beliebige $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$) in Abhängigkeit der Verteilungsfunktion $F_{0,1}$ der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ dar. (Hinweis: Integration durch Substitution.)

Nutzen Sie die Formel aus a) sowie die Tabelle der Standardnormalverteilung (zu finden z.B. im Anhang von Georgii: Stochastik), um folgende Aufgaben zu lösen:

b) Wie groß ist $\mathbb{P}([-0.25, 2.85])$ unter $\mathcal{N}(0, 6.25)$?

c) Bestimmen Sie b, sodass $\mathbb{P}([-1.94, b]) = 0.5$ unter $\mathcal{N}(-1, 1)$.

d) Bestimmen Sie σ, sodass $\mathbb{P}([3, 7]) = 0.82$ unter $\mathcal{N}(5, \sigma^2)$.