Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

5. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2014/2015

Abgabe bis Freitag, 28.11.14, 12 Uhr

1. Aufgabe (Stetige Zufallsvariablen, 4 Punkte)
Ein Stab der Länge l wird zufällig gleichverteilt in zwei Stücke geteilt.

a) Sei X die Länge des kürzeren Stückes. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X.

b) Sei Y der Quotient aus kürzerer und längerer Strecke. Was ist $\mathbb{E}(Y)$?

2. Aufgabe (Unabhängigkeit, 4 Punkte)
Eine faire Münze wird zweimal geworfen. Wir definieren die folgenden Zufallsvariablen:

- $X =$ Anzahl Kopf
- $Y =$ Anzahl Zahl
- $V = |X - Y|$
- $W = \begin{cases} 0 & \text{falls beim ersten Wurf Kopf auftritt} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Sind dann X, V bzw. X, W bzw. V, W unabhängig? Welche dieser Paare sind unkorreliert?

3. Aufgabe (Erwartungswert, 4 Punkte)
Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei reelle Zufallsvariable, für die der Erwartungswert existiert. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Aus $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ folgt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

b) Aus $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0$ folgt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

4. Aufgabe (Exponentialverteilung, 4 Punkte)
Sei X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx$$

gilt, wobei F die Verteilungsfunktion von X ist.

Bemerkung: Die Formel $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx$ gilt allgemein für integrierbare Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$.