Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

6. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2014/2015

Abgabe bis Freitag, 5.12.14, 12 Uhr

1. Aufgabe (Wartezeiten, 4 Punkte)
Betrachten Sie erneut die Zufallsvariable, die in Aufgabe 4 vom zweiten Übungsblatt definiert wurde, d.h.

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{4},\quad \mathbb{P}(X\in[a,b])=\int_a^b f(x)\,dx,\quad 0<a\le b\le\infty$$

mit $f(x)=\frac{3}{4}\lambda e^{-\lambda x}$, $x\in(0,\infty)$, $\lambda>0$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.

b) Es seien $X_1,...,X_n$ unabhängige Kopien von X sowie $X_{\min}=\min(X_1,...,X_n)$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_{\min}$.

c) Geben Sie eine Interpretation von $X_{\min}$ an (im Sinne der Aufgabe 4 vom zweiten Übungsblatt) und beschreiben Sie $\mathbb{P}(X_{\min}\ge 1)$ in Worten.

2. Aufgabe (Erwartungswert, 4 Punkte)
Gegeben sei folgendes Glücksspiel: Eine (faire) Münze wird geworfen. Zeigt sie Kopf, gewinnen Sie 2 Euro und das Spiel ist beendet. Zeigt sie Zahl, wird erneut geworfen. Zeigt die Münze bei diesem zweiten Wurf Kopf, erhalten Sie 4 Euro, ansonsten wird wieder geworfen. Zeigt die Münze beim dritten (bzw. vierten, fünften, ...) Wurf zum ersten mal Kopf, erhalten Sie 8 (bzw. 16, 32, ...) Euro. Es sei X der Gewinn.

a) Geben Sie einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mathbb{P})$ und einen Messraum $(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$ an, sodass $X:(\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mathbb{P})\to(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$, und bestimmen Sie das Bildmaß $\mathbb{P}_X$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.

3. Aufgabe (Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion, 4 Punkte)
Sei $X:\Omega\to\mathbb{N}_0$ eine Zufallsvariable. Die Verteilung einer solchen Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$ lässt sich kompakt durch eine Funktion $G_X:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ charakterisieren, die über

$$G_X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\mathbb{P}(X=n)$$

definiert ist und *wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion* genannt wird.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(X=n)=\frac{1}{n!}G_X^{(n)}(0)$$

gilt, wobei $G_X^{(n)}$ die n-te Ableitung von G_X ist.
Bemerkung: Für $z\in[0,1)$ ist $G_X(z)$ differenzierbar und die Ableitung kann durch gliedweises Differenzieren bestimmt werden.

Auch der Erwartungswert von X lässt sich mithilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion ausdrücken: Ist $G_X(z)$ bei $z = 1$ differenzierbar, so gilt $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

b) Bestimmen Sie G_X für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X und berechnen Sie anschließend deren Erwartungswert einmal direkt und einmal mithilfe von G_X.

4. Aufgabe (Unabhängigkeit und Zähldichte, 4 Punkte)
Es seien $X, Y : \Omega \to W \subset \mathbb{R}$ zwei diskrete Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn $\mathbb{P}(X = a,\ Y = b) = \mathbb{P}(X = a) \cdot \mathbb{P}(Y = b)$ für alle $a, b \in W$ gilt.

Bonusaufgabe
Es sei X eine reelle Zufallsvariable. Beweisen Sie: X ist genau dann fast sicher konstant, wenn es keine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}(X < a) > 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X > a) > 0$$

gibt. Dabei heißt X fast sicher konstant, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathbb{P}(X = c) = 1$.