Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

8. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2014/2015

Abgabe bis Freitag, 19.12.14, 12 Uhr

1. Aufgabe (Unabhängigkeit, 4 Punkte)
Wir versehen $[0,1]$ mit der Dichtefunktion $f(x) = cx^2$.

a) Bestimmen Sie c.

b) Bestimmen Sie die Menge M aller Intervalle $[a,b] \subseteq [0,1]$, die von $[0,0.4]$ unabhängig sind.

c) Gibt es zwei Intervalle $[a_1,b_1],[a_2,b_2] \in M$, die voneinander unabhängig sind?

2. Aufgabe (Folgen von Zufallsvariablen, 4 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Weiter sei $Y = 0$ (d.h. $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$).

a) Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen Y konvergiert, d.h. es gilt $X_n \xrightarrow{\text{i.V.}} Y$. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktionen von X_n und Y.

b) Prüfen Sie, ob $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unter den gegebenen Voraussetzungen stets auch in Wahrscheinlichkeit bzw. fast sicher gegen Y konvergiert.

3. Aufgabe (Wartezeiten, 4 Punkte)
Ein Kunde ruft zweimal bei einer Telefonhotline an. Beide Male ist die Leitung belegt und er muss warten, bis sein Anruf entgegen genommen wird.
Es sei X_1 die Wartezeit beim ersten Anruf und X_2 die Wartezeit beim zweiten Anruf. X_1 sei exponentialverteilt zum Parameter $\lambda_1 > 0$ und X_2 sei unabhängig von X_1 und exponentialverteilt zum Parameter $\lambda_2 > 0$.

a) Bestimmen Sie die Dichtefunktion $f_{X_1+X_2}$ für $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vergleichen Sie den Grenzwert von $f_{X_1+X_2}$ für $\lambda_1 \to \lambda_2$ mit der aus der Vorlesung bekannten Dichte für unabhängig identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen.

b) Angenommen, die Parameter $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sind frei kombinierbar, solange $\lambda_1 + \lambda_2 = c$ für ein gegebens $c > 0$ gilt. Für welche λ_1, λ_2 ist die zu erwartende Gesamtwartezeit $X_1 + X_2$ minimal?

4. Aufgabe (Bedingter Erwartungswert, 4 Punkte)
Es seien X und Y reelle Zufallsvariablen mit stetiger gemeinsamer Dichte f.

a) Das Ziel ist es, eine sinnvolle Definition für die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq a|Y = y)$, $a, y \in \mathbb{R}$, herzuleiten. Betrachten Sie dazu den Grenzwert von $\mathbb{P}(X \leq a|Y \in [y, y + \varepsilon))$ für $\varepsilon \to 0$. (Sie brauchen nicht zu beweisen, dass es sich tatsächlich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt.) Bestimmen Sie außerdem die zu $\mathbb{P}(\cdot|Y = y)$ gehörige Dichte, die wir mit $f_{X|Y}(x; y)$ bezeichnen wollen.

b) Leiten Sie aus a) eine sinnvolle Definition des Erwartungswertes $\mathbb{E}(X|Y = y)$ her und berechnen Sie $\mathbb{E}(X|X + Y = z)$ für unabhängig exponentialverteilte Zufallsvariablen X, Y.