Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

Weihnachtszettel zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2014/2015

Freiwillige Abgabe bis 9. Januar, 12 Uhr

Die Aufgaben auf diesem Zettel sind Wiederholungsaufgaben, die Bearbeitung ist freiwillig. Sie können Ihre Lösungen zur Korrektur abgeben und eine der Aufgaben aus Teil II markieren: Für diese werden Ihrem Punktekonto dann ein paar Extrapunkte zugeschrieben.

Teil I

Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr " oder „falsch" sind.

wahr	falsch	Aussage
		Fast sichere Konvergenz impliziert Konvergenz in Verteilung.
		Aus $\mathbb{E}[\lvert X_n - X\rvert] \to 0$ folgt die Konvergenz $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit.
		Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen nimmt nur Werte zwischen Null und Eins an.
		Die Vereinigung von zwei σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra.
		Gemeinsam normalverteilte Zufallsvariable sind genau dann unabhängig, wenn sie unkorreliert sind.
		Wenn A und B unabhängige Ereignisse sind, dann gilt $\mathbb{P}[A\lvert B] = \mathbb{P}[A]$.
		Die Potenzmenge einer Menge bildet stets eine σ-Algebra.
		Der Erwartungswert einer reellen Zufallsvariablen ist immer endlich.
		Für zwei reelle Zufallsvariablen X, Y gilt $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Teil II

1. Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat vergessen die Weihnachtsgeschenke mit Namen zu beschriften und muss sie daher zufällig verteilen. Dabei enthält der Sack 4 Geschenke für 4 Kinder, denen jeweils genau ein Geschenk zusteht.

a) Formulieren Sie einen geeignenten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Sei X die Anzahl der Kinder, die das richtige Geschenk bekommen. Bestimmen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von X. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Kinder das richtige Geschenk erhält?

c) Wie groß ist für ein Kind die Wahrscheinlichkeit das richtige Geschenk zu bekommen, wenn es weiß, dass bereits k ($k = 1, 2, 3$) der anderen Kinder das jeweils richtige Geschenk bekommen haben?

2. Aufgabe

Beim Kauf einer Lichterkette mit 100 Lichtern hat man die Wahl zwischen zwei Herstellern. Bei Hersteller H_1 sind die Lampen unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% kaputt, bei Hersteller H_2 beträgt diese Wahrscheinlichkeit nur 0.1%, dafür ist die Kette teurer.

a) Muss man sich die teure Kette leisten, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% sicher sein möchte, dass alle Lampen funktionieren?

b) Man lässt eine faire Münze entscheiden, welchen Hersteller man wählt. Zuhause stellt man fest, dass keine der Lampen kaputt ist; von welchem Hersteller die Kette stammt, hat man allerdings schon wieder vergessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Lichterkette von Hersteller H_1?

3. Aufgabe

Ein fairer Würfel wird so oft geworfen bis zum ersten mal eine 6 erscheint. Dabei sei X die Anzahl der Würfe.

a) Was ist die im Mittel zu erwartende Anzahl der Würfe? Wie groß ist die Streuung um den Mittelwert?

b) Beweisen und interpretieren Sie die Gleichung

$$\mathbb{P}(X > k + m | X > k) = \mathbb{P}(X > m), \qquad k, m \in \mathbb{N}_0.$$

c) Das Würfelexperiment wird wiederholt. Sei Y die Anzahl der Würfe beim zweiten Durchlauf. Was ist $\mathbb{E}(X + Y)$ und $\mathrm{Var}(X + Y)$?

4. Aufgabe

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein gegebener Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen. Es ist $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}\}$ das Ereignis, dass unendlich viele dieser Ereignisse eintreten. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ genau dann, wenn χ_{A_n} in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert.

b) Aus $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ folgt $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

c) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bernoulliverteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = n^{-3/2}$. Weiter sei $Y = 0$ (fast sicher). Zeigen Sie, dass X_n fast sicher gegen Y konvergiert.

5. Aufgabe

Es seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X bzw. f_Y und Verteilungsfunktion F_X bzw. F_Y. Die gemeinsame Verteilung der zweidimensionalen Zufallsvariable $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, 1]$ und die Verteilungsfunktion

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t)\, dt\, ds.$$

X und Y heißen unabhängig, falls $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$ und $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass X, Y genau dann unabhängig sind, wenn $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ gilt.

c) Es sei $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ zweidimensional normalverteilt mit $\mu = (0, 0)$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Randverteilungen f_X und f_Y. Sind X und Y unabhängig? Versuchen Sie, die gemeinsame Verteilung sowie die Randverteilungen in einer gemeinsamen Graphik darzustellen.

Frohe Weihnachten!