Zentrale Begriffe (Vorlesung vom 16.10.2015)

Kondition eines Problems:

Kleine Ursache, große Wirkung (Orkan Lothar, Moleküldynamik).

Stabilität eines Algorithmus:

Keine Äquivalenz vom Multiplikation und mehrfacher Addition.

Komplexität eines Problems

Effizienz eines Algorithmus

Darstellung natürlicher und ganzer Zahlen (Vorlesung vom 23.10.2015)

Ziffernsysteme:

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen.

Ziffernsysteme: Definition und Beispiele.

Satz: Die Menge aller Ziffernketten $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Positionssysteme:

Definition und Beispiele.

Dezimal- und Dualdarstellung natürlicher Zahlen.

Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Ganze Zahlen:

Erweiterung der Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

Dualdarstellung mit Vorzeichenbit.

Darstellung negativer ganzer Zahlen im Rechner: Zweierkomplement.

Darstellung rationaler und reeller Zahlen (Vorlesung vom 30.10.15)

Rationale Zahlen:

Rationale Zahlen als Brüche ganzer Zahlen.

q-adische Brüche, periodische q-adische Brüche. Beispiele.

Satz: Jede rationale Zahl ist als periodischer q-adischer Bruch darstellbar.

Eindeutigkeit durch $0,\overline{9}$ statt 1.

Praktische Realisierung: Dynamische Ziffernzahl. Aufwand pro Addition problemabhängig. (Hauptnenner, Kürzen).

Reelle Zahlen:

Reelle Zahlen als unendliche q-adische Brüche.

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar. Folgerung: Es gibt keine Zifferndarstellung von $\mathbb{R}$.

Konsequenz: Numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht möglich!

Festkommazahlen:

Absoluter und relativer Fehler. Beispiele.

Definition von Festkommazahlen und Gleitkommazahlen. Beispiele.

Rundungsfehler und Gleitkommaarithmetik (Vorlesung vom 6.11.15)

Runden und Rundungsfehler:

Der absolute Rundungsfehler ist nicht gleichmäßig beschränkt.

Der relative Rundungsfehler ist gleichmäßig beschränkt.

Obere Schranke: Maschinengenauigkeit $eps = eps(q, \ell)$.

Praktische Realisierung von Gleitkommazahlen:

Endlicher Exponentenbereich bewirkt endlichen Zahlenvorrat. Datentypen: `double`, `float`.

Zahlenmengen statt Zahlen:

Menge aller Gleitkomma-Approximationen von $x \in \mathbb{R}$ mit relativem Fehler $eps(q, \ell)$.
Menge aller reellen Zahlen, die auf $\tilde{x} \in \mathbb{G}(q, \ell)$ gerundet werden.
Folgerung: Gleichheitsabfragen von Gleitkommazahlen verboten.

Algebraische Eigenschaften:

Gleitkommaarithmetik, Verlust von Assoziativität, Distributivität, Invertierbarkeit.
Folgerung: Übliche Umformungen sind nicht mehr äquivalent.

Kondition (Vorlesung vom 13.11.15)

Relative Kondition der Grundrechenarten:
Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate.
Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung).
Deshalb: Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:
Die absolute Kondition κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}}|x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \ .$$

Sätze zur absoluten Kondition:
Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)|$.
Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq L$.
Für geschachtelte Funktionen $f(x) = g(h(x))$ gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq \kappa_{\text{abs}}(g, y_0)\ \kappa_{\text{abs}}(h, x_0)$.

Kondition: Anwendungen (Vorlesung vom 20.11.15)

Kondition nichtlinearer Gleichungen:

Problem: Finde x^*, so dass $g(x^*) = y^*$

Definition der absolute Kondition κ_{abs}:
Auswirkung von Fehlern in der rechten Seite y^* auf die Lösung

Satz:
Hinreichende Bedingungen für die Existenz von g^{-1} in einer Umgebung von y^*.

Äquivalentes Problem: Auswertung der Umkehrfunktion g^{-1} an der Stelle y^*

Satz: $\kappa_{\text{abs}} = |(g^{-1})'(y^*)| = |g'(x^*)|^{-1}$

Definition und Berechnung der relativen Kondition: klar!

Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Ronaldinhos Kondition

Stabilitätsanalyse (Vorlesung vom 27.11.15)

Stabilität:
Motivation des Stabilitäts- und Algorithmusbegriffs. Abgrenzung zur Kondition.
Relative Stabilität von Algorithmen zur Funktionsauswertung.
Definition und Beispiele.

Gesamtfehlerabschätzungen:
Satz 7.5: Der Gesamtfehler lässt sich abschätzen durch die Summe von
Eingabefehler, verstärkt durch die Kondition, und
Auswertungsfehler, verstärkt durch die Stabilität.

Stabilitätsabschätzungen:
Kondition der Elementarfunktionen und Stabilität:
Grundrechenarten (Satz 7.9) und Elementarfunktionen (Satz 7.8). Beispiele.
Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!
Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!
Das Polynom-Desaster in MATLAB: Grobe Stabilitätsanalyse.

Stabilitätsabschätzungen (Vorlesung vom 4.12.15)

Auswertungsbäume zur systematischen Stabilitätsabschätzung
Auswertungsbaum: Knoten, gerichtete Kanten, Wurzel, Blätter
Zerlegung in Teilbäume
Von den Blättern zur Wurzel:
rekursive Funktionsauswertung und Stabilitätsabschätzung
Theoretische Grundlage: Satz 7.6 und Satz 7.9
Beispiele.

Summationsalgorithmen
Rekursive Summation, Auswertungsbaum, Stbilitätsanalyse
Hierarchische Summation.

Aufwand und Komplexität **(Vorlesung vom 11.12.15)**

Komplexität und Effizienz

Aufwand: Anzahl dominanter Operationen (worst-case). Beispiel.
Landau-Symbol $O(n)$. Beispiel.

Definition: Aufwand eines Algorithmus. Komplexität eines Problems.

Summation

Aufwand: rekursive und hierarchische Summation. Komplexität.

Sortieren

Aufwand: TumbSort, BubbleSort und MergeSort. Komplexität.

Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von $\mathbf{a \geq b}$:

Naiver Algorithmus (Ausprobieren): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen.
Variante (Ausprobieren rückwärts): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen (worst-case!).

Strukturelle Einsicht: Kongruenzen (Gauß 1801), Rekursionssatz.
Euklidischer Agorithmus: Aufwand: $\mathcal{O}(\log(b))$ Divisionen.

Vektor– und Matrixnormen (Vorlesung vom 18.12.15)

Grundlagen:
Matrix–Vektor– und Matrixprodukt. Lineare Räume. Beispiele.

Problem:
Berechne die Lösung x von $Ax = b$ zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
Ziele: Konditionsanalyse dieses Problems, Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus.

Normen auf linearen Räumen:
Motivation: Erweiterung des Betrags von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n,n}$.
Definition: Axiomatisierung des Längenbegriffs. Beispiele: $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, auf $\mathbb{R}^n$.
Zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$ gehörige Matrixnorm:

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,, \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n}\,.$$

Beispiel: Zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gehört die Zeilensummenorm.

Kondition linearer Gleichungssysteme **(Vorlesung vom 8.1.16)**

Konvergenz in normierten Räumen

Definition: $x^{(\nu)} \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - x^{(\nu)}\| \to 0, \qquad$ für $\nu \to \infty$

Satz: Die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n,n}$ ist äquivalent zur komponentenweise Konvergenz.

Existenz und Eindeutigkeit:

Reguläre und singuläre Matrizen. Inverse Matrix.

Die Regularität von A ist äquivalent zur Existenz eindeutig bestimmter Lösungen.

Störungen von Koeffizientenmatrix A und rechter Seite b:

Normweiser absoluter und relativer Fehler.

Definition: $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ heißt Kondition von A. Beispiele.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von b.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A, b.

Numerische Beispiele.

Der Gaußsche Algorithmus und Varianten **(Vorlesung vom 15.1.16)**

Gaußsche Elimination und Rückwärtssubstitution:
Motivation am Beispiel, Verallgemeinerung und Algorithmus.
Achtung: Durchführbarkeit nur bei nichtverschwindenden Pivotelementen!
Aufwand des Gaußschen Algorithmus: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ (Aufwandsmaß: Punktoperationen).
Gaußsche Elimination, Eliminationsmatrizen G_k und LR–Zerlegung $A = LR$.
Vorteile der LR–Zerlegung bei vielen rechten Seiten und gleicher Koeffizientenmatrix.

Reduktion des Aufwands durch Ausnutzen von Spezialstruktur:
Tridiagonalmatrizen:
Invarianz der Besetzungsstruktur unter Gaußelimination.
Keine Elimination der ohnehin vorhandenen Subdiagonalnullen: Aufwand $\mathcal{O}(n)$.

Stabilitätsanalyse des Gaußsche Algorithmus'

(Vorlesung vom 22.1.16)

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche:
Auswirkung von Auswertungsfehlern am Beispiel, Definition der Stabilität.
Stabilitätsanalyse in drei verschiedenen Auflösungen:
Konditionsverschlechterung durch Elimination.
Extrembeispiel: Wilkinsonmatrix.
Algorithmische Konsequenzen: Pivotsuche.
Abschätzung der Stabilität durch $\kappa(A)$ und n.