Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

3. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WS 2015/2016

Abgabe: 19.11.2015

1. Aufgabe (4 TP)

An einer deutschen Universität wurde im Sommersemester 2001 folgende Aufgabe gestellt:

> *An n=8 Erwachsenen wurde das Körpergewicht* (y) *in Abhängigkeit von der Körpergröße* (x_1) *und dem Alter* (x_2) *bestimmt. Die Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.*

y	*(in kg)*	*80*	*72*	*83*	*65*	*77*	*78*	*90*	*85*
x_1	*(in cm)*	*181*	*175*	*180*	*170*	*178*	*182*	*185*	*170*
x_2	*(in Jahren)*	*40*	*65*	*50*	*25*	*48*	*52*	*36*	*60*

> *Bestimmen Sie die Schätzung des Parametervektors* β *nach der MKQ.*
>
> *Hinweis:*
> $$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 154.86 & -0.85 & -0.08 \\ -0.85 & 0.005 & 0.0002 \\ -0.08 & 0.0002 & 0.0008 \end{pmatrix},$$
> $$X'y = \begin{pmatrix} 630 \\ 112072 \\ 29747 \end{pmatrix}.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe sollten die Studenten folgendermaßen vorgehen: Anhand der Meßergebnisse definiert man X und y als

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 181 & 40 \\ 1 & 175 & 65 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 170 & 60 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 80 \\ 72 \\ \vdots \\ 85 \end{pmatrix}$$

und berechnet dann den Parametervektor β durch

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y,$$

wobei X' die Transponierte der Matrix X und Y^{-1} die Inverse der Matrix Y (d.h. $Y^{-1}Y = YY^{-1} = \mathrm{Id}$) bezeichnet. Unter Beachtung des Hinweises war also nur eine einfache Matrix-Vektor-Multiplikation auszuführen.
Überraschenderweise entspann sich dann bei der Besprechung der Aufgabe ein handfester Disput, da der Professor und einige Studenten die Lösung als

$$\beta_{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} -75.0923 \\ 0.82546 \\ 0.153617 \end{pmatrix}$$

angaben, während die Studenten, die den Hinweis genutzt hatten, auf

$$\beta_{\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} -79.16 \\ 30.8094 \\ -4.188 \end{pmatrix}$$

gekommen waren. Wer hatte recht, und wie konnte der Streit geschlichtet werden?

2. Aufgabe (2 + 5 PP)

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `runden(x,L)`, das die Zahl `x` auf `L` Stellen rundet (das entspricht der Abbildung rd nach G(10, `L`)).

b) Implementieren Sie ein MATLAB-Programm `taschenrechner(L,x,y,op)`, das einen einfachen Taschenrechner, der mit `L` Stellen rechnen kann, simuliert. Man soll innerhalb des Programms durch Eingabe zweier Zahlen und einer Grundrechenoperation $\circ \in \{+, -, \times, \div\}$ das Ergebnis der Operation

$$\tilde{x}\tilde{\circ}\tilde{y} = \mathrm{rd}(\tilde{x} \circ \tilde{y})$$

als Ausgabe erhalten.

Sei $a = 0,12345$ und $b = -0.1234$. Überlegen Sie sich mit Hilfe Ihres Programmes, welche der beiden Darstellungen der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ die bessere ist.

3. Aufgabe (2 + 3 TP)
Für $x, y, s \in \mathrm{R}$ mit $x, y, s > 0$ soll mit dem Rechner überprüft werden, ob

$$x + y = s \tag{1}$$

gilt. Dabei ist zu beachten, daß im Rechner nur $\mathrm{rd}(x)$, $\mathrm{rd}(y)$, $\mathrm{rd}(s)$ darstellbar sind und eps ≤ 0.5 gilt.

a) Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Prüfung von

$$\mathrm{rd}(x) + \mathrm{rd}(y) = \mathrm{rd}(s) \tag{2}$$

nicht sinnvoll ist, d.h. im allgemeinen nicht „(1) $\Rightarrow$ (2)" gilt.

b) Zeigen Sie, daß „(1) $\Rightarrow$ (3)" gilt, daß also die Abfrage

$$|\,\mathrm{rd}(x) + \mathrm{rd}(y) - \mathrm{rd}(s)| \leq 4|\,\mathrm{rd}(s)|eps \tag{3}$$

sinnvoll ist.