Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

8. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WS 2015/2016

Abgabe: 7.1.2016

1. Aufgabe (10 PP + 3 TP)
Wir wollen die Laufzeiten verschiedener Algorithmen zur Bestimmung von $\mathrm{ggT}(a, b)$ zweier positiver natürlicher Zahlen a, b testen. Schreiben Sie dazu `matlab`-Programme `ggt_naiv(a,b)`, `ggt_rw(a,b)` und `ggt_euklid(a,b)`, die den größten gemeinsamen Teiler von a und b berechnen. Dabei sollen der naive Algorithmus, der Rückwärts-Algorithmus bzw. der Euklidische Algorithmus verwendet werden.
Erzeugen Sie mit `rand` jeweils $n = 1000$ gleichverteilte Zufallszahlen $a_i \in [100, 1000] \cap \mathbb{N}$, $b_i \in [100, 1000] \cap \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, n$. Führen Sie nun Ihre drei Programme mit den Zahlenpaaren (a_i, b_i) aus, wobei Sie für jedes Verfahren jeweils die Anzahl k_i der Divisionen zählen.

- Geben Sie für jedes der drei Verfahren scharfe (theoretische) obere und untere Schranken für $\max k_i$ und $\min k_i$ an.
- Berechnen Sie $\max k_i$, $\min k_i$ sowie den Mittelwert $\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i$ Ihrer Zufallsstichprobe für jedes der drei Verfahren. Plotten Sie darüber hinaus die Häufigkeit, mit der die k_i auftreten, in einem Histogramm (`matlab`-Befehl `hist` oder `bar`).

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $\mathrm{ggT}(a, b)$ der größte gemeinsame Teiler zweier positiver natürlicher Zahlen a und b. Zeigen Sie dass

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, a \mod b).$$

3. Aufgabe (4 TP)
Zeigen Sie:

a) $\log(n) = o(n)$ für $n \to \infty$

b) $n^k = o(2^n)$ für $n \to \infty$ (k fest)

c) $\log_2(x) = \Theta \log_{10}(x)$ für $x \to \infty$

d) Zu $f(x) = x^2$ existiert eine Funktion $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, so dass $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$ und zugleich $g(\varepsilon) = o(f(\varepsilon))$ für $\varepsilon \to 0$ gilt.