Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

9. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WS 2015/2016

Abgabe: 14.1.2016

1. Aufgabe (6 TP)

a) Zeigen Sie für $p = 1$, dass die in der Vorlesung definierte Abbildung $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Zeigen Sie unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

daß durch $\|\cdot\|_2$ ebenfalls eine Norm definiert ist.

c) Zeichnen Sie im $\mathbb{R}^2$ die Einheitskreise für $p = 1,\ p = 2$ und $p = \infty$.

2. Aufgabe (4 TP)
Zeigen Sie, dass für ein beliebiges, aber fest gewähltes $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p \ = \ \|x\|_\infty$$

gilt. Dabei ist $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ und $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.
Hinweis: Für $c \in (0, 1]$ gilt $\lim_{p\to\infty} c^{\frac{1}{p}} = 1$.

3. Aufgabe (2 TP)
Kann eine Folge $(x^k)_{k=1,2,3\dots} \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich unterschiedlicher Normen gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren? Begründen Sie Ihre Antwort.