

Kondition linearer Gleichungssysteme

Vorlesung vom 8.1.16

Konvergenz in normierten Räumen

Definition: $x^{(\nu)} \rightarrow x \iff \|x - x^{(\nu)}\| \rightarrow 0$, für $\nu \rightarrow \infty$

Satz: Die Konvergenz in \mathbb{R}^n und $\mathbb{R}^{n,n}$ ist äquivalent zur komponentenweise Konvergenz.

Existenz und Eindeutigkeit:

Reguläre und singuläre Matrizen. Inverse Matrix.

Die Regularität von A ist äquivalent zur Existenz eindeutig bestimmter Lösungen.

Störungen von Koeffizientenmatrix A und rechter Seite b :

Normweiser absoluter und relativer Fehler.

Definition: $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ heißt Kondition von A . Beispiele.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von b .

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A .

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A, b .

Numerische Beispiele.

Auswirkungen von Störungen von A und b

Satz 9.12 Sei x die Lösung von $Ax = b$, $b \neq 0$, und \tilde{x} die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\|A - \tilde{A}\|/\|A\| < 1/\kappa(A)$ sowie $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|).$$

Es existieren rechte Seiten $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ und Matrizen $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Die Kondition als Quantifizierung der Regularität

singulären Matrizen: $\mathcal{S} := \{M \in \mathbb{R}^{n,n} \mid M \text{ singular}\} \subset \mathbb{R}^{n,n}$

Die Kondition als Quantifizierung der Regularität

singulären Matrizen: $\mathcal{S} := \{M \in \mathbb{R}^{n,n} \mid M \text{ singular}\} \subset \mathbb{R}^{n,n}$

relativer Abstand von $A \neq 0$ zu \mathcal{S} : $\text{dist}(A, \mathcal{S}) := \inf \left\{ \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \mid B \in \mathcal{S} \right\}$

Die Kondition als Quantifizierung der Regularität

singulären Matrizen: $\mathcal{S} := \{M \in \mathbb{R}^{n,n} \mid M \text{ singular}\} \subset \mathbb{R}^{n,n}$

relativer Abstand von $A \neq 0$ zu \mathcal{S} : $\text{dist}(A, \mathcal{S}) := \inf \left\{ \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \mid B \in \mathcal{S} \right\}$

Satz 9.9 Für alle regulären Matrizen A gilt

$$\text{dist}(A, \mathcal{S}) \geq \frac{1}{\kappa(A)} .$$

Die Kondition als Quantifizierung der Regularität

singulären Matrizen: $\mathcal{S} := \{M \in \mathbb{R}^{n,n} \mid M \text{ singular}\} \subset \mathbb{R}^{n,n}$

relativer Abstand von $A \neq 0$ zu \mathcal{S} : $\text{dist}(A, \mathcal{S}) := \inf \left\{ \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \mid B \in \mathcal{S} \right\}$

Satz 9.9 Für alle regulären Matrizen A gilt

$$\text{dist}(A, \mathcal{S}) \geq \frac{1}{\kappa(A)} .$$

Folgerung:

A „fast singular“, d.h. $\text{dist}(A, \mathcal{S})$ klein $\implies \kappa(A)$ groß!

Beispiel: Schleifender Schnitt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_{\infty} = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = (2 + \varepsilon) \varepsilon^{-1} (2 + \varepsilon) = \frac{(2 + \varepsilon)^2}{\varepsilon} \rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

Beispiel: Schleifender Schnitt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_{\infty} = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = (2 + \varepsilon) \varepsilon^{-1} (2 + \varepsilon) = \frac{(2 + \varepsilon)^2}{\varepsilon} \rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} & 1 \\ -1 - \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} & 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{S}, \quad \frac{\|A - B\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} = \frac{1}{\kappa_{\infty}(A)}$$

Beispiel: Schleifender Schnitt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_{\infty} = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = (2 + \varepsilon) \varepsilon^{-1} (2 + \varepsilon) = \frac{(2 + \varepsilon)^2}{\varepsilon} \rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} & 1 \\ -1 - \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} & 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{S}, \quad \frac{\|A - B\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} = \frac{1}{\kappa_{\infty}(A)}$$

Bemerkung: Allgemein ex. ein $B \in \mathcal{S}$ mit $\text{dist}_{\infty}(A, \mathcal{S}) = \frac{\|A - B\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} = \frac{1}{\kappa_{\infty}(A)}$

Beispiel: Schleifender Schnitt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_{\infty} = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = (2 + \varepsilon) \varepsilon^{-1} (2 + \varepsilon) = \frac{(2 + \varepsilon)^2}{\varepsilon} \rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} & 1 \\ -1 - \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} & 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{S}, \quad \frac{\|A - B\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} = \frac{1}{\kappa_{\infty}(A)}$$

Bemerkung: Allgemein ex. ein $B \in \mathcal{S}$ mit $\text{dist}_{\infty}(A, \mathcal{S}) = \frac{\|A - B\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} = \frac{1}{\kappa_{\infty}(A)}$

Folgerung: Schlecht konditionierte Matrizen sind „fast singulär“!

Problem und Algorithmus

Problem: Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

Auswertung des Lösungsoperators $f(A, b) = A^{-1}b$ zu Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Satz 9.12 Relative Kondition des Problems $\kappa_{\text{rel}} = \kappa(A)$

Problem und Algorithmus

Problem: Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

Auswertung des Lösungsoperators $f(A, b) = A^{-1}b$ zu Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Satz 9.12 Relative Kondition des Problems $\kappa_{\text{rel}} = \kappa(A)$

Algorithmus: Zerlegung des Lösungsoperators in Elementaroperationen

$$x = A^{-1}b = G_m \circ \cdots \circ G_1(A, b)$$

Qualitätskriterien: Aufwand und Stabilität

Lineare Gleichungssysteme

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \quad x = b$

Lineare Gleichungssysteme

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A \quad x = b$$

erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array} \right)$$

Gaußscher Algorithmus

eliminieren von x_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 5 \\ 2 & 5 & 8 & | & -1 \\ 3 & 6 & 10 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2 * 1. \text{ Zeile} \\ -3 * 1. \text{ Zeile} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 5 \\ 0 & -3 & -6 & | & -11 \\ 0 & -6 & -11 & | & -15 \end{pmatrix}$$

Gaußscher Algorithmus

eliminieren von x_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 5 \\ 2 & 5 & 8 & | & -1 \\ 3 & 6 & 10 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2 * 1. \text{ Zeile} \\ -3 * 1. \text{ Zeile} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 5 \\ 0 & -3 & -6 & | & -11 \\ 0 & -6 & -11 & | & -15 \end{pmatrix}$$

eliminieren von x_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 5 \\ 0 & -3 & -6 & | & -11 \\ 0 & -6 & -11 & | & -15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2 * 2. \text{ Zeile} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 5 \\ 0 & -3 & -6 & | & -11 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Gestaffeltes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \quad x = z$$

Gestaffeltes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \quad x = z$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ & -3x_2 & -6x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} \\ \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gestaffeltes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \quad x = z$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ & -3x_2 & -6x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} \\ -31/3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gestaffeltes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \quad x = z$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ & -3x_2 & -6x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -31/3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gesetz oder Zufall?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L

R

Gesetz oder Zufall?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$L \qquad R \qquad = \qquad A$

Gesetz oder Zufall?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$L \qquad R \qquad = \qquad A$

LR-Zerlegung

Der 1. Eliminationsschritt

Voraussetzung: Pivotelement $a_{11} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)})$$

$$(A^{(1)}|b^{(1)})$$

Berechnung von $(A^{(0)}|b^{(0)}) \rightarrow (A^{(1)}|b^{(1)})$:

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= a_{1j}, & b_1^{(1)} &= b_1, & j &= 1, \dots, n, \\ a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - \ell_{i1} a_{1j}, & b_i^{(1)} &= b_i - \ell_{i1} b_1, & \ell_{i1} &:= \frac{a_{i1}}{a_{11}}, & i, j &= 2, \dots, n, \end{aligned}$$

Gaußsche Elimination (Algorithmus 9.12)

for $k = 1 : n - 1$ do

{

for $i = k + 1 : n$ do (falls $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0!$)

{

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \ell_{ik} b_k^{(k-1)}; \quad a_{ik}^{(k)} = 0;$$

for $j = k + 1 : n$ do

{

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)};$$

}

}

}

Rückwärtssubstitution

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Algorithmus 10.2 (Rückwärtssubstitution)

for $i = n - 1 : (-1) : 1$ do

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}^{(n-1)}} b_n^{(n-1)}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(n-1)}} \left(b_i^{(n-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(n-1)} x_j \right)$$

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)



Carl Friedrich Gauß im Jahre 1828

- 1799 Promotion (Hauptsatz der Algebra)
- 1801 Disquisitiones Arithmeticae (Kongruenzen, ...)
- 1801 Berechnung der Ceres-Bahn
(Fehlerquadrate, **Gaußscher Algorithmus**)
- 1807 Direktor der Göttinger Sternwarte
- 1818 Vermessung des Königreichs Hannover
(bis 1830 ca. 70 Arbeiten zu Geodäsie)
- 1832 Erforschung des Erdmagnetismus
(Potentialtheorie, Gaußscher Satz, ...)
1840-1843 Antarktis-Expedition
der Royal Society (James Clarke Ross)
angeregt von Gauß, Weber und Humboldt
Feldstärke des Erdmagnetfelds ≈ 1 Gauß

Eliminationsmatrizen

$$G_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ell_{k+1,k} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ell_{n,k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Lemma 10.3: Mit $A^{(0)} = A$ und $b^{(0)} = b$ gilt

$$A^{(k)} = (I - G_k)A^{(k-1)}, \quad b^{(k)} = (I - G_k)b^{(k-1)}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

LR-Zerlegung von A

Satz 10.4 Ist der Gaußsche Algorithmus für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ durchführbar (d.h. erhält man Pivotelemente $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$) und ergeben sich dabei die Eliminationsmatrizen G_1, \dots, G_{n-1} , so gilt

$$A = LR \quad \text{mit} \quad L = I + \sum_{k=1}^{n-1} G_k, \quad R = \prod_{k=1}^{n-1} (I - G_{n-k})A$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \left(1 + \sum_{j=k+1}^n 1 \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n 1 \\ &= \frac{1}{3}(n^3 - n) + \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2) \end{aligned}$$

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \left(1 + \sum_{j=k+1}^n 1 \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n 1 \\ &= \frac{1}{3}(n^3 - n) + \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2) \end{aligned}$$

Aufwand der Rücksubstitution:

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{j=i+1}^n 1 \right) = \sum_{i=1}^n (n - i + 1) = \sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n \left(1 + \sum_{j=k+1}^n 1\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n 1$$
$$= \frac{1}{3}(n^3 - n) + \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Aufwand der Rücksubstitution:

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{j=i+1}^n 1\right) = \sum_{i=1}^n (n - i + 1) = \sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

Gesamtaufwand: $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Lösung von $Ax = b$ mit LR -Zerlegung

Gauß-Elimination: Berechnung von $A = LR$ Aufwand: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Vorwärtssubstitution: Löse $Lz = b$ $\mathcal{O}(n^2)$

Rückwärtssubstitution: Löse $Rx = z$ $\mathcal{O}(n^2)$

Lösung von $Ax = b$ mit LR -Zerlegung

Gauß-Elimination: Berechnung von $A = LR$ Aufwand: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Vorwärtssubstitution: Löse $Lz = b$ $\mathcal{O}(n^2)$

Rückwärtssubstitution: Löse $Rx = z$ $\mathcal{O}(n^2)$

Viele Systeme mit verschiedenen rechten Seiten:

$$Ax^j = b^j, \quad j = 1, \dots, J, \quad \text{Aufwand: } \frac{1}{3}n^3 + J \cdot \mathcal{O}(n^2)$$

Ausnutzen von Spezialstruktur: Tridiagonalmatrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Ausnutzen von Spezialstruktur: Tridiagonalmatrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Beobachtung: $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik}a_{kj}^{(k-1)} = 0 - 0, \quad i > k + 1$

Ausnutzen von Spezialstruktur: Tridiagonalmatrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Beobachtung: $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik}a_{kj}^{(k-1)} = 0 - 0, \quad i > k + 1$

Thomas-Algorithmus: $a_{ij}^{(k)} =: 0 \quad i > k + 1 \implies$ Aufwand: $5n - 4 = \mathcal{O}(n)$