Stabilitätsanalyse des Gaußsche Algorithmus' Vorlesung vom 22.1.16

Auswirkung von Auswertungsfehlern:

Beispiel und Definition der Stabilität.
Stabilitätsanalyse in drei verschiedenen Auflösungen. Einfachster Fall:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 2\kappa(R)eps + o(eps)$$

$$\kappa(R) = \kappa\left(\prod_{k=1}^{n-1}(I - G_{n-k})A\right) \leq \kappa(A)\prod_{k=1}^{n-1}\kappa(I - G_k)$$

Fazit: Konditionsverschlechterung durch Elimination.

Extrembeispiel: Wilkinsonmatrix.

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche:

Algorithmische Konsequenzen: Pivotsuche.
Abschätzung der Stabilität: $\kappa(R) \leq 4^{n-1}\kappa(A)$.
LR-Zerlegung einer permutierten Matrix.

Organisatorisches zur Klausur am 5.2.2016

Verbindliche Verteilung: Anfangsbuchstaben des Nachnamens

A-H : Henry-Ford-Bau, Hörsaal C
I-Q : Henry-Ford-Bau, Hörsaal D
R-Z : Henry-Ford-Bau, Hörsaal B

Beginn: 12:00 Uhr, Ende: 13:30 Uhr (90 Minuten), Ausweis mitbringen!

Erlaubt: selbst mitgebrachte schriftliche Unterlagen und Bücher.

Verboten: jegliche elektronischen Hilfs- und Kommunikationsmittel (Taschenrechner, Mobiltelefon, Laptop, ...), Täuschungsversuche

Zentrale Begriffe

Vorlesung vom 16.10.2015

Kondition eines Problems:

Kleine Ursache, große Wirkung (Orkan Lothar, Moleküldynamik).

Stabilität eines Algorithmus:

Keine Äquivalenz vom Multiplikation und mehrfacher Addition.

Komplexität eines Problems

Effizienz eines Algorithmus

Darstellung natürlicher und ganzer Zahlen **Vorlesung vom 23.10.2015**

Ziffernsysteme:

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen.

Ziffernsysteme: Definition und Beispiele.

Satz: Die Menge aller Ziffernketten $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Positionssysteme:

Definition und Beispiele.

Dezimal- und Dualdarstellung natürlicher Zahlen.

Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Ganze Zahlen:

Erweiterung der Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.

Dualdarstellung mit Vorzeichenbit.

Darstellung negativer ganzer Zahlen im Rechner: Zweierkomplement.

Darstellung rationaler und reeller Zahlen

Vorlesung vom 30.10.15

Rationale Zahlen:

Rationale Zahlen als Brüche ganzer Zahlen.

q-adische Brüche, periodische q-adische Brüche. Beispiele.

Satz: Jede rationale Zahl ist als periodischer q-adischer Bruch darstellbar.

Eindeutigkeit durch $0,\overline{9}$ statt 1.

Praktische Realisierung: Dynamische Ziffernzahl. Aufwand pro Addition problemabhängig. (Hauptnenner, Kürzen).

Reelle Zahlen:

Reelle Zahlen als unendliche q-adische Brüche.

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar. Folgerung: Es gibt keine Zifferndarstellung von $\mathbb{R}$.

Konsequenz: Numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht möglich!

Festkommazahlen:

Absoluter und relativer Fehler. Beispiele.

Definition von Festkommazahlen und Gleitkommazahlen. Beispiele.

Typische Aufgabe

Formen Sie den periodischen Dualbruch $0,\overline{10}_2$ in einen Dualbruch um, d. h. bestimmen Sie zwei ganze Zahlen a; b in Dualdarstellung, so dass gilt

$$0,\overline{10}_2 = \frac{a}{b}.$$

Rundungsfehler und Gleitkommaarithmetik

Vorlesung vom 6.11.15

Runden und Rundungsfehler:

Der absolute Rundungsfehler ist nicht gleichmäßig beschränkt.

Der relative Rundungsfehler ist gleichmäßig beschränkt.

Obere Schranke: Maschinengenauigkeit $eps = eps(q, \ell)$.

Praktische Realisierung von Gleitkommazahlen:

Endlicher Exponentenbereich bewirkt endlichen Zahlenvorrat. Datentypen: `double`, `float`.

Zahlenmengen statt Zahlen:

Menge aller Gleitkomma-Approximationen von $x \in \mathbb{R}$ mit relativem Fehler $eps(q, \ell)$.

Menge aller reellen Zahlen, die auf $\tilde{x} \in \mathbb{G}(q, \ell)$ gerundet werden.

Folgerung: Gleichheitsabfragen von Gleitkommazahlen verboten.

Algebraische Eigenschaften:

Gleitkommaarithmetik, Verlust von Assoziativität, Distributivität, Invertierbarkeit.

Folgerung: Übliche Umformungen sind nicht mehr äquivalent.

Kondition

Vorlesung vom 13.11.15

Relative Kondition der Grundrechenarten:
Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate.
Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung).
Deshalb: Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:
Die absolute Kondition κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \ .$$

Sätze zur absoluten Kondition:
Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)|$.
Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq L$.
Für geschachtelte Funktionen $f(x) = g(h(x))$ gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq \kappa_{\text{abs}}(g, y_0)\ \kappa_{\text{abs}}(h, x_0)$.

Kondition: Anwendungen

Vorlesung vom 20.11.15

Kondition nichtlinearer Gleichungen:

Problem: Finde x^*, so dass $g(x^*) = y^*$

Definition der absolute Kondition κ_{abs}:
Auswirkung von Fehlern in der rechten Seite y^* auf die Lösung

Satz:
Hinreichende Bedingungen für die Existenz von g^{-1} in einer Umgebung von y^*.

Äquivalentes Problem: Auswertung der Umkehrfunktion g^{-1} an der Stelle y^*

Satz: $\kappa_{\text{abs}} = |(g^{-1})'(y^*)| = |g'(x^*)|^{-1}$

Definition und Berechnung der relativen Kondition: klar!

Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Ronaldinhos Kondition

Typische Aufgabe

Für eine gegebene reelle Zahl $b > 0$ soll die positive Nullstelle $x_0 = f(b)$ der Funktion

$$P(x) = x^2 + 2x - b$$

berechnet werden.

a) Berechnen Sie die relative Kondition dieses Problems.

Stabilitätsanalyse

Vorlesung vom 27.11.15

Stabilität:

Motivation des Stabilitäts- und Algorithmusbegriffs. Abgrenzung zur Kondition.
Relative Stabilität von Algorithmen zur Funktionsauswertung.
Definition und Beispiele.

Gesamtfehlerabschätzungen:

Satz 7.5: Der Gesamtfehler lässt sich abschätzen durch die Summe von
Eingabefehler, verstärkt durch die Kondition, und
Auswertungsfehler, verstärkt durch die Stabilität.

Stabilitätsabschätzungen:

Kondition der Elementarfunktionen und Stabilität:
Grundrechenarten (Satz 7.9) und Elementarfunktionen (Satz 7.8). Beispiele.
Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!
Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!
Das Polynom-Desaster in MATLAB: Grobe Stabilitätsanalyse.

Stabilitätsabschätzungen

Vorlesung vom 4.12.15

Auswertungsbäume zur systematischen Stabilitätsabschätzung
Auswertungsbaum: Knoten, gerichtete Kanten, Wurzel, Blätter
Zerlegung in Teilbäume
Von den Blättern zur Wurzel:
rekursive Funktionsauswertung und Stabilitätsabschätzung
Theoretische Grundlage: Satz 7.6 und Satz 7.9
Beispiele.

Summationsalgorithmen
Rekursive Summation, Auswertungsbaum, Stbilitätsanalyse
Hierarchische Summation.

Das Apfelmännchen
Automatische Auswertung des Auswertungsbaums

Typische Aufgabe

Für eine gegebene reelle Zahl $b > 0$ soll die positive Nullstelle $x_0 = f(b)$ der Funktion

$$P(x) = x^2 + 2x - b$$

berechnet werden.

a) Berechnen Sie die relative Kondition dieses Problems.

b) Berechnen Sie eine obere Schranke für die Stabilität des Algorithmus'

$$f(b) = \frac{b}{g_1 \circ g_2 \circ g_1(b)}, \qquad g_1(y) = 1 + y, \quad g_2(y) = \sqrt{y}$$

Aufwand und Komplexität **Vorlesung vom 11.12.15**

Komplexität und Effizienz

Aufwand: Anzahl dominanter Operationen (worst-case). Beispiel.
Landau-Symbol $O(n)$. Beispiel.

Definition: Aufwand eines Algorithmus. Komplexität eines Problems.

Summation

Aufwand: rekursive und hierarchische Summation. Komplexität.

Sortieren

Aufwand: TumbSort, BubbleSort und MergeSort. Komplexität.

Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von $\mathbf{a \geq b}$:

Naiver Algorithmus (Ausprobieren): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen.
Variante (Ausprobieren rückwärts): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen (worst-case!).

Strukturelle Einsicht: Kongruenzen (Gauß 1801), Rekursionssatz.
Euklidischer Agorithmus: Aufwand: $\mathcal{O}(\log(b))$ Divisionen.

Vektor– und Matrixnormen

Vorlesung vom 18.12.15

Grundlagen:
Matrix–Vektor– und Matrixprodukt. Lineare Räume. Beispiele.

Problem:
Berechne die Lösung x von $Ax = b$ zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
Ziele: Konditionsanalyse dieses Problems, Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus.

Normen auf linearen Räumen:
Motivation: Erweiterung des Betrags von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n,n}$.
Definition: Axiomatisierung des Längenbegriffs. Beispiele: $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$, auf $\mathbb{R}^n$.
Zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$ gehörige Matrixnorm:

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,, \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n}\,.$$

Beispiel: Zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gehört die Zeilensummenorm.

Typische Aufgabe

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\|B - \mathrm{rd}(B)\|_\infty}{\|B\|_\infty} \leq eps, \qquad \frac{\|y - \mathrm{rd}(y)\|_\infty}{\|y\|_\infty} \leq eps$$

für alle $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ richtig ist. Dabei bedeuten $\mathrm{rd}(B) = (\mathrm{rd}(b_{ij}))_{i,j=1}^n$, $\mathrm{rd}(y) = (\mathrm{rd}(y_i))_{i=1}^n$ und eps die Maschinengenauigkeit.

Kondition linearer Gleichungssysteme

Vorlesung vom 8.1.16

Konvergenz in normierten Räumen

Definition: $x^{(\nu)} \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - x^{(\nu)}\| \to 0, \qquad$ für $\nu \to \infty$

Satz: Die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n,n}$ ist äquivalent zur komponentenweise Konvergenz.

Existenz und Eindeutigkeit:

Reguläre und singuläre Matrizen. Inverse Matrix.

Die Regularität von A ist äquivalent zur Existenz eindeutig bestimmter Lösungen.

Störungen von Koeffizientenmatrix A und rechter Seite b:

Normweiser absoluter und relativer Fehler.

Definition: $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ heißt Kondition von A. Beispiele.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von b.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A, b.

Numerische Beispiele.

Der Gaußsche Algorithmus und Varianten

Vorlesung vom 15.1.16

Gaußsche Elimination und Rückwärtssubstitution:
Motivation am Beispiel, Verallgemeinerung und Algorithmus.
Achtung: Durchführbarkeit nur bei nichtverschwindenden Pivotelementen!
Aufwand des Gaußschen Algorithmus: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ (Aufwandsmaß: Punktoperationen).
Gaußsche Elimination, Eliminationsmatrizen G_k und LR–Zerlegung $A = LR$.
Vorteile der LR–Zerlegung bei vielen rechten Seiten und gleicher Koeffizientenmatrix.

Reduktion des Aufwands durch Ausnutzen von Spezialstruktur:
Tridiagonalmatrizen:
Invarianz der Besetzungsstruktur unter Gaußelimination.
Keine Elimination der ohnehin vorhandenen Subdiagonalnullen: Aufwand $\mathcal{O}(n)$.

Typische Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lässt sich eine LR-Zerlegung von A mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren berechnen? Falls ja, berechnen Sie die LR-Zerlegung von A. Falls nein, berechnen Sie die LR-Zerlegung einer Permutation PA mit einer geeigneten Permutationsmatrix P.

Stabilitätsanalyse des Gaußsche Algorithmus' Vorlesung vom 22.1.16

Auswirkung von Auswertungsfehlern:

Beispiel und Definition der Stabilität.

Stabilitätsanalyse in drei verschiedenen Auflösungen. Einfachster Fall:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 2\kappa(R)eps + o(eps)$$

$$\kappa(R) = \kappa\left(\prod_{k=1}^{n-1}(I - G_{n-k})A\right) \leq \kappa(A)\prod_{k=1}^{n-1}\kappa(I - G_k)$$

Fazit: Konditionsverschlechterung durch Elimination.

Extrembeispiel: Wilkinsonmatrix.

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche:

Algorithmische Konsequenzen: Pivotsuche.

Abschätzung der Stabilität: $\kappa(R) \leq 4^{n-1}\kappa(A)$.

LR-Zerlegung einer permutierten Matrix.

Typische Aufgabe

Die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, $b \neq 0$, kann durch Lösung der beiden Systeme

$$Lz = b, \qquad Rx = z$$

berechnet werden. Runden führt auf das gestörte System

$$\tilde{R}\tilde{x} = \tilde{z}, \qquad \tilde{R} = \mathrm{rd}(R), \quad \tilde{z} = \mathrm{rd}(z).$$

Geben sie eine obere Schranke für den resultierenden Fehler

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

an.

Typische Programmier-Aufgabe

Was tut dieses Programm?

Was ist hier falsch?

...

Teil I (10 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch angekreuzte Aussage wird ein Punkt abgezogen. Sie können jedoch nicht weniger als 0 Punkte in Teil I bekommen!

wahr	falsch	Aussage
		Im Dualsystem sind alle reellen Zahlen exakt darstellbar.
		Alle endlichen Dezimalbrüche sind als endliche Dualbrüche darstellbar.
		Der relative Rundungsfehler ist nie größer als die Maschinengenauigkeit.
		Die Stabilität ist eine Eigenschaft des Algorithmus'.
		Die Stabilität ist eine Eigenschaft des Problems.
		Die relative Kondition ist immer größer als die absolute Kondition.
		Die Auswertung einer linearen Funktionen hat die absolute Kondition $\kappa_{\text{abs}} \equiv 1$.
		Ist f nicht differenzierbar in x_0, so hat die Auswertung von $f(x_0)$ die absolute Kondition $\kappa_{\text{abs}} = \infty$.
		Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist für alle Koeffizientenmatrizen A ohne Zeilentausch durchführbar.
		Wird durch das Gaußsche Eliminationsverfahren aus einer regulären Matrix A die obere Dreiecksmatrix R erzeugt, so gilt immer $\kappa(R) \leq \kappa(A)$.

Teil II finden Sie auf der Seite 3.

Organisatorisches zur Klausur am 5.2.2016

Verbindliche Verteilung: Anfangsbuchstaben des Nachnamens

A-H : Henry-Ford-Bau, Hörsaal C
I-Q : Henry-Ford-Bau, Hörsaal D
R-Z : Henry-Ford-Bau, Hörsaal B

Beginn: 12:00 Uhr, Ende: 13:30 Uhr (90 Minuten), Ausweis mitbringen!

Erlaubt: selbst mitgebrachte schriftliche Unterlagen und Bücher.

Verboten: jegliche elektronischen Hilfs- und Kommunikationsmittel (Taschenrechner, Mobiltelefon, Laptop, ...), Täuschungsversuche

Vorlesung CoMa I am 12.2.2016

- Nachlese
- ECMath: Aims, Plans, and Structure
- Berlin Mathematical School (BMS)