

Wiederholung: Kondition Vorlesung vom 13.11.15

Relative Kondition der Grundrechenarten:

Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate.

Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (**Auslöschung**).

Deshalb: **Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.**

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:

Die **absolute Kondition** κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|) .$$

Sätze zur **absoluten** Kondition:

Ist f differenzierbar in x_0 , so gilt $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)|$.

Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L , so gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq L$.

Für geschachtelte Funktionen $f(x) = g(h(x))$ gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq \kappa_{\text{abs}}(g, y_0) \kappa_{\text{abs}}(h, x_0)$.

Relative Kondition von Funktionsauswertungen

gegeben: Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \neq x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$

Problem: (*)

Auswertung von f an der Stelle x_0

Definition 3.6 (Relative Kondition)

Die **relative Kondition** κ_{rel} von (*) ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|).$$

Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{rel} vor, so wird $\kappa_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

Relative versus absolute Kondition

absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|)$$

Relative versus absolute Kondition

absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o\left(\frac{|x_0 - x|}{|x_0|}\right)$$

Satz: Es gilt

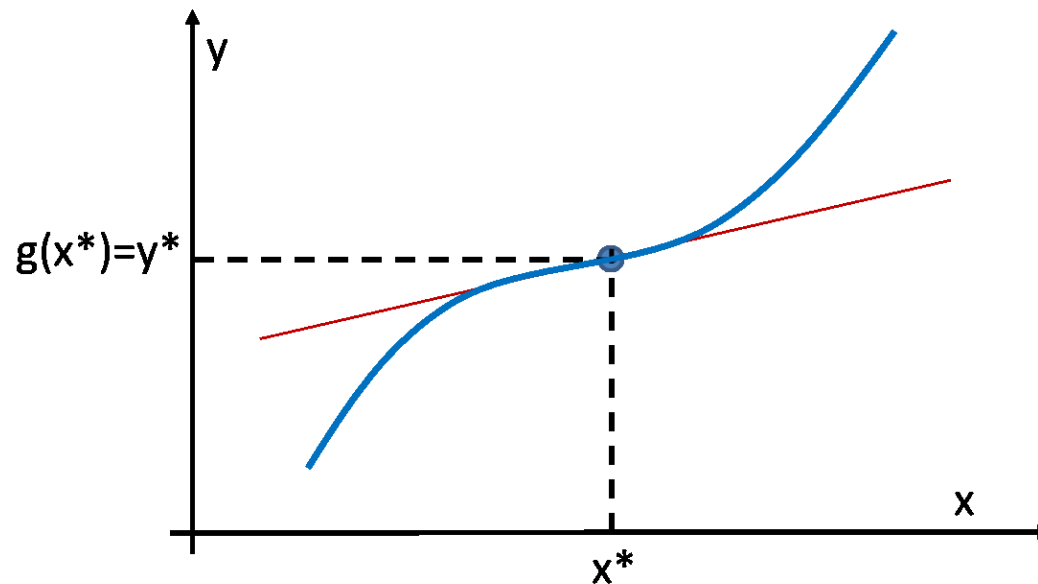
$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \kappa_{\text{abs}}.$$

Nichtlineare Gleichungen

gegeben: Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $y^* \in \mathbb{R}$

Problem: (*)

Finde $x^* \in I$ so dass $g(x^*) = y^*$



Absolute Kondition

Definition 6.16: (Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen)

Die **absolute Kondition** κ_{abs} von (*) ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|x^* - x| \leq \kappa_{\text{abs}} |y^* - y| + o(|y^* - y|)$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y| > 0$ zu y^* und den zugehörigen Lösungen x des **gestörten Problems**

$$x \in I : \quad g(x) = y .$$

Existiert keine solche reelle Zahl κ_{abs} , so wird $\kappa_{\text{abs}} = \infty$ gesetzt.

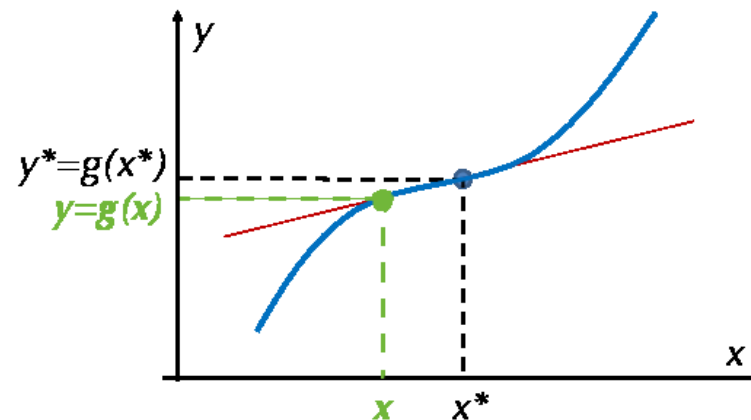
Existenz und Eindeutigkeit gestörter Lösungen

Lemma 6.17:

Sei g stetig differenzierbar in (a, b) , $x^* \in (a, b)$: $g(x^*) = y^*$ sowie

$$g'(x^*) \neq 0.$$

Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < x^* < \beta < b$,
so daß das gestörte Problem $x : g(x) = y$ für jedes $y \in V = (g(\alpha), g(\beta))$
eine **eindeutig bestimmte Lösung** $x \in U = (\alpha, \beta)$ besitzt.



Existenz und Eindeutigkeit gestörter Lösungen

Lemma 6.17:

Sei g stetig differenzierbar in (a, b) , $g(x^*) = y^*$ sowie

$$g'(x^*) \neq 0.$$

Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < x^* < \beta < b$,
so daß das gestörte Problem $x : g(x) = y$ für jedes $y \in V = (g(\alpha), g(\beta))$
eine **eindeutig bestimmte Lösung** $x \in U = (\alpha, \beta)$ besitzt.

Folgerung:

Falls $g'(x^*) \neq 0$ existiert eine **Umkehrfunktion** $g^{-1} : V \rightarrow U$ so dass

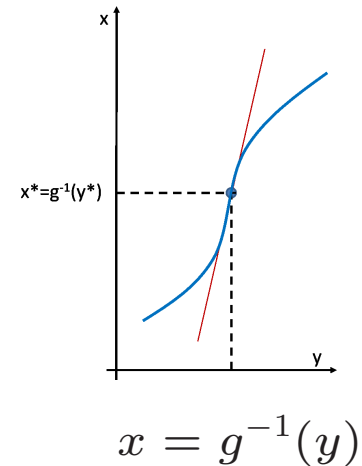
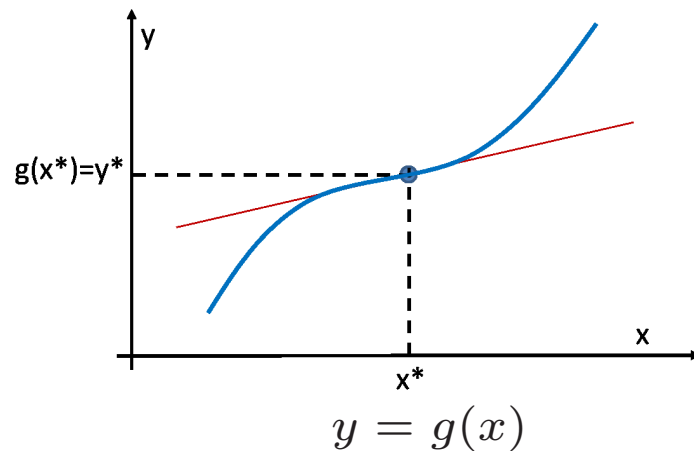
$$g(g^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in V.$$

Äquivalentes Problem

gegeben: Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $y^* \in V$ mit $g'(x^*) \neq 0$

Problem:

Auswertung von $g^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $y^* \in V$

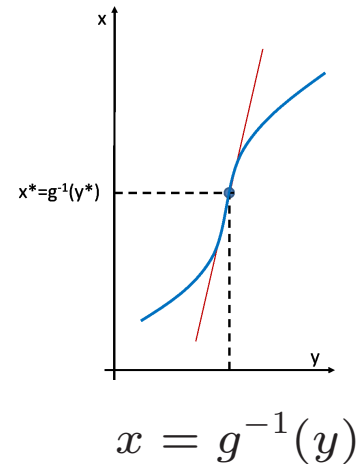
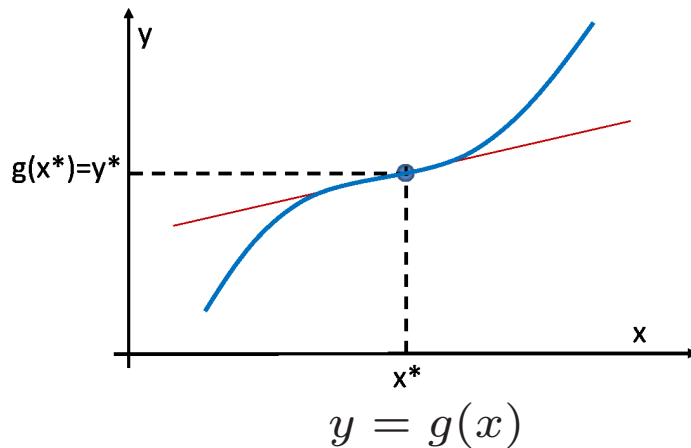


Absolute Kondition der Umkehrfunktion

Lemma 6.18.

Es sei $g \in C^1(a, b)$, $g(x) = y \in V$ und $g'(x) \neq 0$.
Dann ist g^{-1} differenzierbar in y und es gilt

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)} \quad \forall y \in V .$$



Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz 6.19

Es sei $g \in C^1(a, b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$.

Dann ist die **absolute Kondition** κ_{abs} der Lösung von

$$x^* \in I : \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz 6.19

Es sei $g \in C^1(a, b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$.

Dann ist die **absolute Kondition** κ_{abs} der Lösung von

$$x^* \in I : \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $y = g(x) = ax, a \neq 0,$

Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz 6.19

Es sei $g \in C^1(a, b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$.

Dann ist die **absolute Kondition** κ_{abs} der Lösung von

$$x^* \in I : \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $y = g(x) = ax$, $a \neq 0$, $x = g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y$,

Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz 6.19

Es sei $g \in C^1(a, b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$.

Dann ist die **absolute Kondition** κ_{abs} der Lösung von

$$x^* \in I : \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $y = g(x) = ax$, $a \neq 0$, $x = g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y$, $\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|a|}$

Relative Kondition

Definition 6.16: (Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen)

Die **relative Kondition** κ_{rel} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{\kappa_{\text{rel}} |y^* - y|}{|y^*|} + o(|y^* - y|)$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y| > 0$ zu y^* und den zugehörigen Lösungen x des **gestörten Problems**

$$x \in I : \quad g(x) = y .$$

Existiert keine solche reelle Zahl κ_{rel} , so wird $\kappa_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz 6.21

Es sei $g \in C^1(a, b)$, $a^* \neq 0$, $g(x^*) = y^* \neq 0$ und $g'(x^*) \neq 0$.
Dann ist die **relative Kondition** κ_{abs} der Lösung von

$$x^* \in I : \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*||g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $g(x) = ax$, $a \neq 0$, $g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y$, $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|ax^*|}{|x^*||a|} = 1$

Grenzen der Genauigkeit?

geforderte relative Genauigkeit: $err := \frac{|x-x^*|}{|x^*|} < Tol$

$$err \approx \kappa_{rel} eps < Tol \quad \implies \quad \kappa_{rel} < Tol/eps$$

Grenzen der Genauigkeit?

geforderte relative Genauigkeit: $err := \frac{|x-x^*|}{|x^*|} < Tol$

$$err \approx \kappa_{rel} eps < Tol \quad \implies \quad \kappa_{rel} < Tol/eps$$

“schlecht konditioniert”: $\kappa_{rel} \geq Tol/eps$

Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Problem:

$$x^* \in (0, \pi) : \quad g(x^*) = y^*, \quad g(x) = \exp(10^{-9} \tan(x - 1)), \quad y^* = 1$$

Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Problem:

$$x^* \in (0, \pi) : \quad g(x^*) = y^*, \quad g(x) = \exp(10^{-9} \tan(x - 1)), \quad y^* = 1$$

Lösung: $x^* = 1$

Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Problem:

$$x^* \in (0, \pi) : \quad g(x^*) = y^*, \quad g(x) = \exp(10^{-9} \tan(x - 1)), \quad y^* = 1$$

Lösung: $x^* = 1$

Kondition: $\kappa_{\text{rel}} = 1/g'(x^*) = 10^9$, Genauigkeitsschranke: $\kappa_{\text{rel}} \text{eps} \approx 10^{-7}$

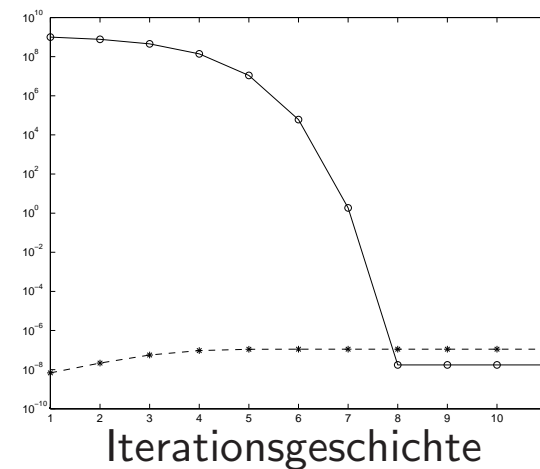
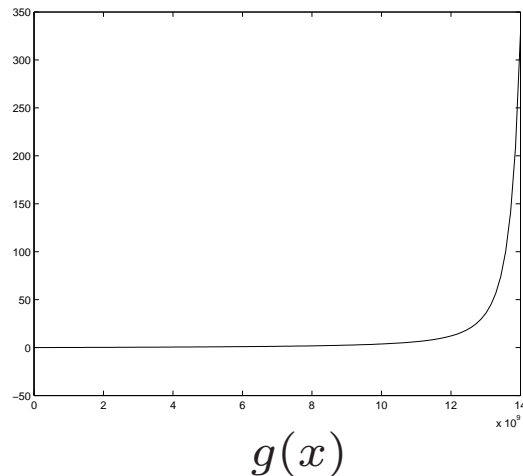
Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Problem:

$$x^* \in (0, \pi) : g(x^*) = y^*, \quad g(x) = \exp(10^{-9} \tan(x - 1)), \quad y^* = 1$$

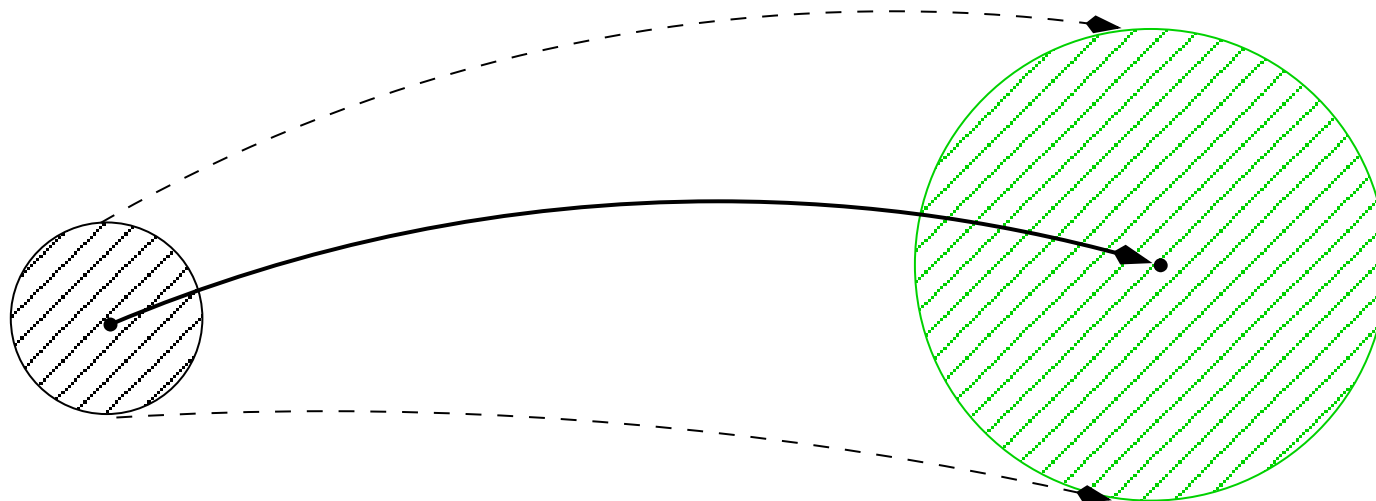
Lösung: $x^* = 1$

Kondition: $\kappa_{\text{rel}} = 1/g'(x^*) = 10^9$, Genauigkeitsschranke: $\kappa_{\text{rel}} \text{eps} \approx 10^{-7}$



Kondition

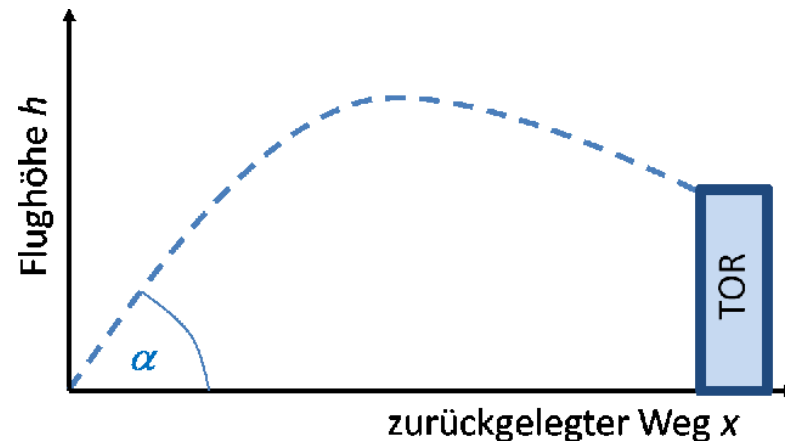
Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis



Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

Ronaldinho und die Kondition

Mathematisches Modell: Überflughöhe



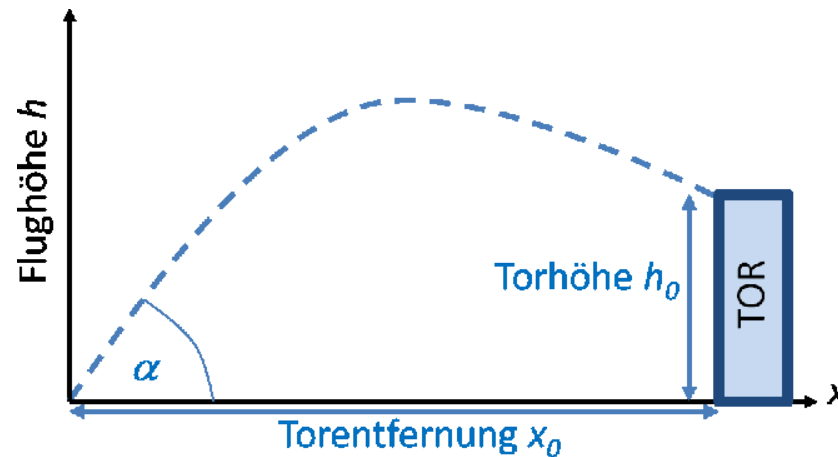
Flughöhe und zurückgelegter Weg
in Abhängigkeit von Zeit t , Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$h(t) = vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x(t) = vt \cos \alpha$$

g : Fallbeschleunigung = $9.81m/s^2$

Mathematisches Modell: Flugkurve

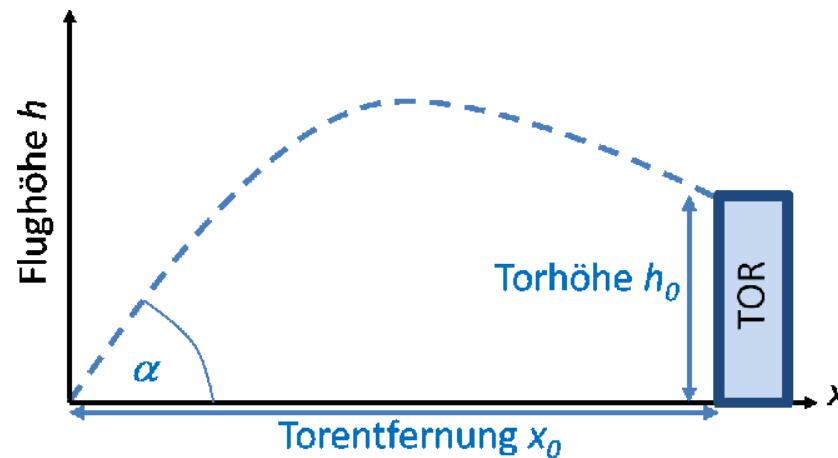


Überflughöhe über der Torlinie
in Abhängigkeit von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v, \alpha) = x_0 \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x_0^2}{v^2 \cos^2 \alpha}$$

g : Fallbeschleunigung = 9.81 m/s^2

Lattentreffer mit zurückspringendem Ball



Überflughöhe abhängig von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta \alpha) = h_0 + \Delta h \in (2.50 \text{ m} \pm 0.04 \text{ m})$$

Torhöhe: $h_0 = 2.50 \text{ m}$, Lattenbreite: 12 cm

Kondition

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h \in (2.50m \pm 0.04m)$$

Erlaubter "Eingabefehler": Δv und $\Delta\alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04 m$

Kondition

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h \in (2.50m \pm 0.04m)$$

Erlaubter "Eingabefehler": Δv und $\Delta\alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04$

Vereinfachung: fester Abschusswinkel $\Delta\alpha = 0$ ($\Delta\alpha \neq 0$ siehe Skript 6.6)

$$|\Delta h(\Delta v)| = |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| \leq 0.04m$$

Kondition

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h \in (2.50m \pm 0.04m)$$

Erlaubter "Eingabefehler": Δv und $\Delta\alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04$

Vereinfachung: fester Abschusswinkel $\Delta\alpha = 0$ ($\Delta\alpha \neq 0$ siehe Skript 6.6)

$$|\Delta h(\Delta v)| = |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| \leq 0.04m$$

Kondition: (bei festem $\alpha \equiv \alpha_0$)

$$\begin{aligned} |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| &\leq \kappa_{\text{abs}}(H, v_0) \cdot |\Delta v| + o(\Delta v) \\ \kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \left| \frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0) \right| \end{aligned}$$

Absolute Kondition

Vereinfachung: fester Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^\circ$

$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g \frac{x_0^2}{v^2}$$

Absolute Kondition

Vereinfachung: fester Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^\circ$

$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g \frac{x_0^2}{v^2}$$

Konditionsberechnung:

$$\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) = \left| \frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0) \right| = 2g \frac{x_0^2}{v_0^3}$$

Absolute Kondition

Vereinfachung: fester Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^\circ$

$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g \frac{x_0^2}{v^2}$$

Konditionsberechnung:

$$\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) = \left| \frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0) \right| = 2g \frac{x_0^2}{v_0^3}$$
$$v_0 = \frac{|x_0| \sqrt{g}}{\sqrt{x_0 - h_0}} = 49 \text{ km/h}$$

Absolute Kondition

Vereinfachung: fester Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^\circ$

$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g \frac{x_0^2}{v^2}$$

Konditionsberechnung:

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \left| \frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0) \right| = 2g \frac{x_0^2}{v_0^3} \\ v_0 &= \frac{|x_0| \sqrt{g}}{\sqrt{x_0 - h_0}} = 49 \text{ km/h} \\ \kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{(x_0 - h_0)^{3/2}}{x_0} = 1.98 \text{ s}\end{aligned}$$

Relative Kondition

Vereinfachung: fester Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^\circ$

$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g \frac{x_0^2}{v^2}$$

Konditionsberechnung:

$$\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{(x_0 - h_0)^{3/2}}{x_0} = 1.98 \text{ s}$$

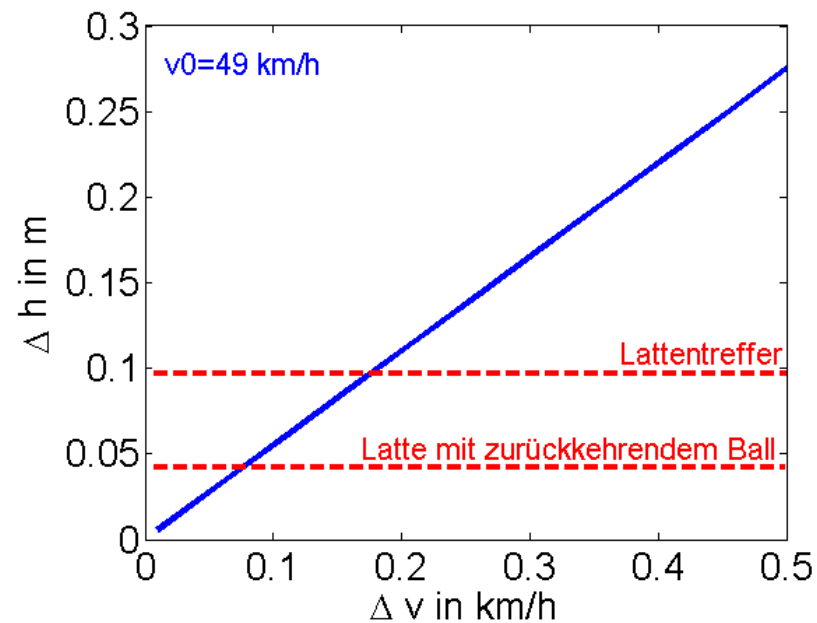
$$\kappa_{\text{rel}}(H, v_0) = \kappa_{\text{abs}}(H, v_0) \frac{v_0}{H(v_0, \alpha_0)}$$

$$\kappa_{\text{rel}}(H, v_0) = 2 \frac{|x_0 - h_0|}{h_0} = 10.8$$

Ronaldinhos Kondition: Fehler in der Überflughöhe

Eingabefehler: $\Delta\alpha = 0$ (Abschusswinkel), Δv (Abschussgeschwindigkeit)

Auswirkung: $\Delta h = \kappa_{\text{abs}} \Delta v + o(|\Delta v|)$



Ronaldinhos Kondition: Fehler in der Überflughöhe

Eingabefehler: $\Delta\alpha = 0$ (Abschusswinkel), Δv (Abschussgeschwindigkeit)

Auswirkung: $\Delta h = \kappa_{\text{abs}}\Delta v + o(|\Delta v|)$

Ronaldinhos Kondition: Fehler in der Überflughöhe

Eingabefehler: $\Delta\alpha = 0$ (Abschusswinkel), Δv (Abschussgeschwindigkeit)

Auswirkung: $\Delta h = \kappa_{\text{abs}}\Delta v + o(|\Delta v|)$

Anforderung: Abschussgeschwindigkeit von 49 km/h bis auf

$$\Delta h \leq 0.04m : \quad \Delta v \leq 0.073 \text{ km/h}$$

treffen, also etwa auf ein Promille genau.

Ronaldinhos Kondition: Fehler in der Überflughöhe

Eingabefehler: $\Delta\alpha = 0$ (Abschusswinkel), Δv (Abschussgeschwindigkeit)

Auswirkung: $\Delta h = \kappa_{\text{abs}}\Delta v + o(|\Delta v|)$

Anforderung: Abschussgeschwindigkeit von 49 km/h bis auf

$$\Delta h \leq 0.04m : \quad \Delta v \leq 0.073 \text{ km/h}$$

treffen, also etwa auf ein Promille genau.

Experimente:

Streuung von $\Delta v = 0.28 \text{ m/s} \approx 1 \text{ km/h}$ kann nicht unterschritten werden.