Stabilitätsanalyse Vorlesung vom 27.11.15

Stabilität:

Motivation des Stabilitäts- und Algorithmusbegriffs. Abgrenzung zur Kondition.

Relative Stabilität von Algorithmen zur Funktionsauswertung.

Definition und Beispiele.

Gesamtfehlerabschätzungen:

Satz 7.5: Der Gesamtfehler lässt sich abschätzen durch die Summe von

Eingabefehler, verstärkt durch die Kondition, und

Auswertungsfehler, verstärkt durch die Stabilität.

Stabilitätsabschätzungen:

Kondition der Elementarfunktionen und Stabilität:

Grundrechenarten (Satz 7.9) und Elementarfunktionen (Satz 7.8). Beispiele.

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!

Das Polynom-Desaster in MATLAB: Grobe Stabilitätsanalyse.

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216
```

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Was ist hier schiefgelaufen?

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \;, \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \ , \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \;, \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \;, \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \;, \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \ , \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$

tatsächliche Fehlerverstärkung: $|8 - 393216|/(|8|eps) \approx 2.2 \cdot 10^{20}$

Kompliziertere Algorithmen

Kompliziertere Algorithmen

Systematische Analyse des Gesamtfehlers

Beispiel

Algorithmus 1: $F_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

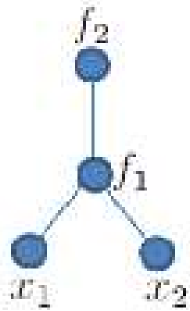
$$F_1(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$$

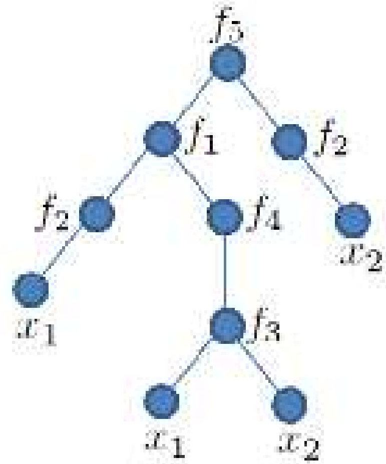
Algorithmus 2: $F_1(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2(x_1 x_2)) + x_2^2$

$$F_2(x_1, x_2) = f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big)$$

$$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

Auswertungsbäume



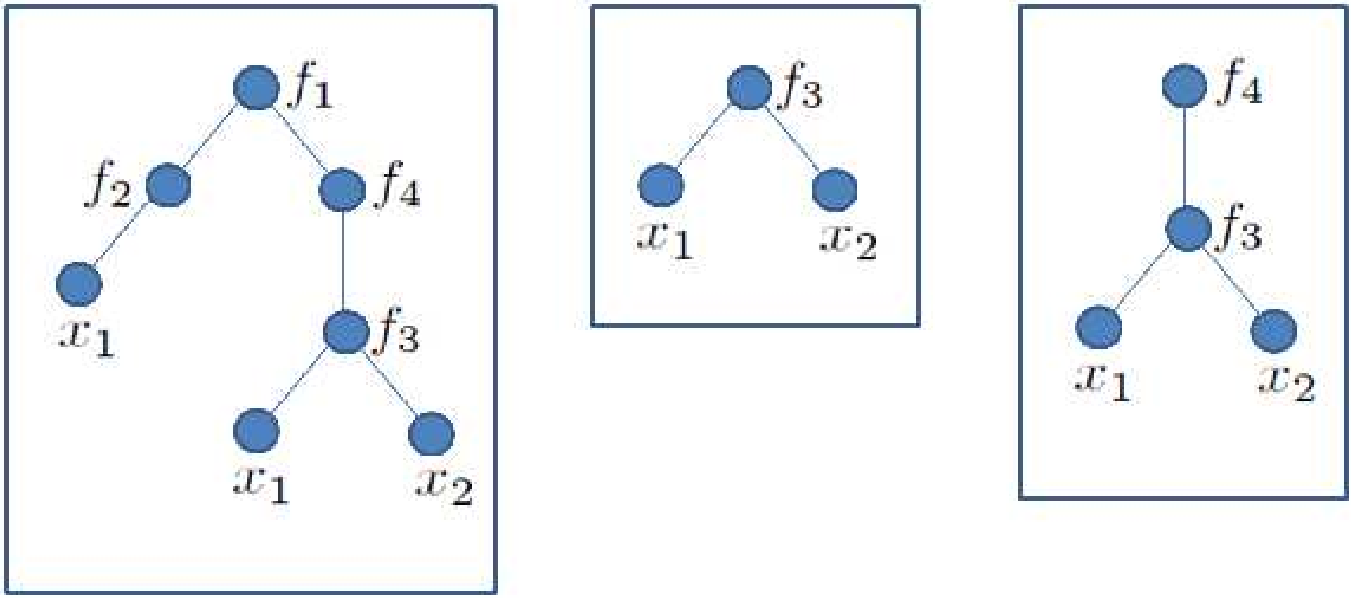


$$F_1(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2)), \quad f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2$$

$$F_2(x_1, x_2) = f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big),$$

$$f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

Teilbäume



Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäume

Auswertungsbaum: gerichteter Graph β (Knoten, gerichtete Kanten)

Anzahl der Knoten: $\#\beta$

Wurzel: nur eingehende Kanten, Blätter nur ausgehende Kante

Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäume

Auswertungsbaum: gerichteter Graph β (Knoten, gerichtete Kanten)

Anzahl der Knoten: $\#\beta$

Wurzel: nur eingehende Kanten, Blätter nur ausgehende Kante

Teilbäume β_i entstehen Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten

Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäume

Auswertungsbaum: gerichteter Graph β (Knoten, gerichtete Kanten)

Anzahl der Knoten: $\#\beta$

Wurzel: nur eingehende Kanten, Blätter nur ausgehende Kante

Teilbäume β_i entstehen Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten

Zerlegung in Teilbäume: $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m]$,

Gesamtzahl von Knoten: $\#\beta = 1 + \#\beta_1 + \ldots + \#\beta_m$

Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäume

Auswertungsbaum: gerichteter Graph β (Knoten, gerichtete Kanten)

Anzahl der Knoten: $\#\beta$

Wurzel: nur eingehende Kanten, Blätter nur ausgehende Kante

Teilbäume β_i entstehen Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten

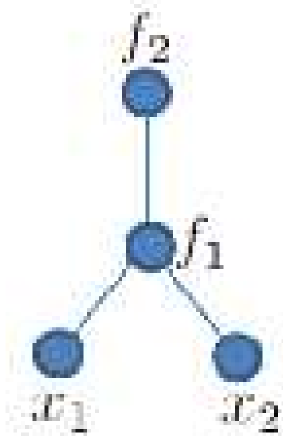
Zerlegung in Teilbäume: $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m]$,

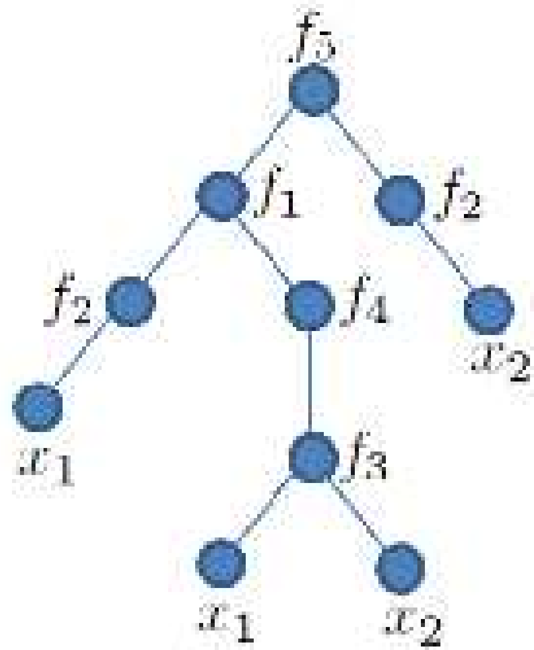
Gesamtzahl von Knoten: $\#\beta = 1 + \#\beta_1 + \ldots + \#\beta_m$

trivialer Baum: nur einen Knoten (seine Wurzel):

$$\beta = [\,], \quad \text{mit} \quad \#\beta = 1.$$

Algorithmus 1:

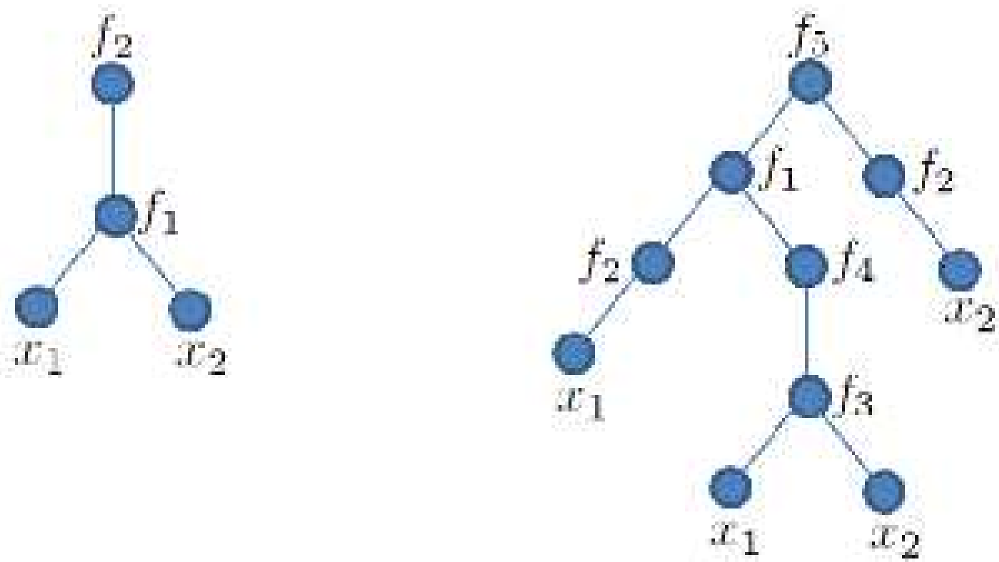




$$\beta_{F_1} \quad = \quad [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$$

Die Blätter $\quad \beta_{0,1} = \beta_{0,2} = []$ stehen für Eingabewerten x_k in $\beta_{0,k}$, $k = 1, 2$.

Algorithmus 2:



$$\begin{aligned} \beta_{F_2} &= [\beta_e, \beta_f] \\ \beta_e &= [\beta_a, \beta_b], \quad \beta_f = [\beta_{0,i}] \\ \beta_a &= [\beta_{0,ii}], \quad \beta_b = [\beta_c], \quad \beta_c = [\beta_{0,iii}, \beta_{0,iv}] \end{aligned}$$

Blätter $\beta_{0,ii} = []$, $\beta_{0,iii} = []$ und $\beta_{0,i} = []$, $\beta_{0,iv} = []$ stehen für Eingaben x_1 und x_2.

Zwischenergebnisse mittels Auswertungsbäumen

Zuordnung von Elementarfunktionen und Eingabedaten:

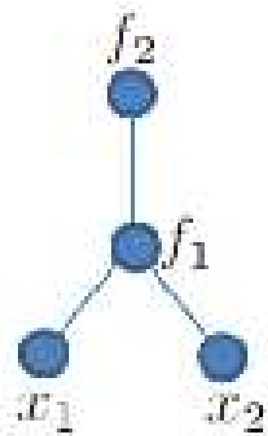
Eingabewert $\leftrightarrow$ Blatt Elementarfunktion $\leftrightarrow$ Knoten

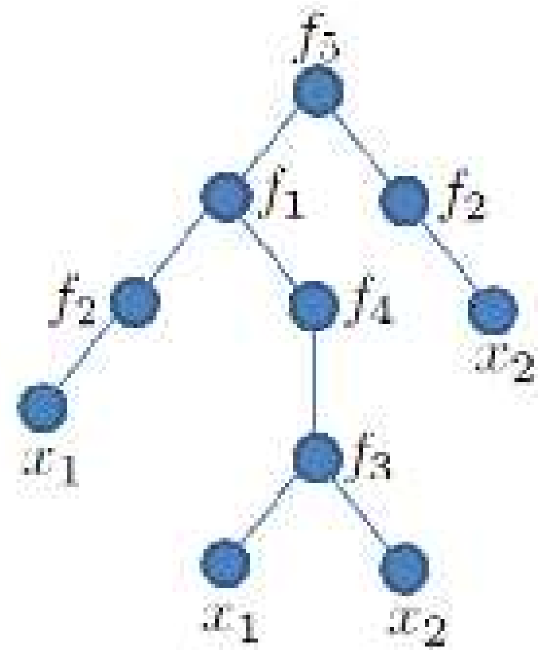
Zwischenergebnisse für jeden Teilbaum β:

Wurzel: Zwischenfunktion f^β Zwischenergebnis: z^β

$$z^\beta = \begin{cases} \text{Eingabewert} & \text{falls} \quad \#\beta = 1 \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}) & \text{falls} \quad \#\beta = m + 1 > 1,\ \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m] \end{cases}$$

Algorithmus 1:

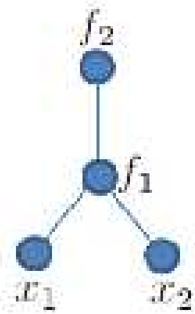


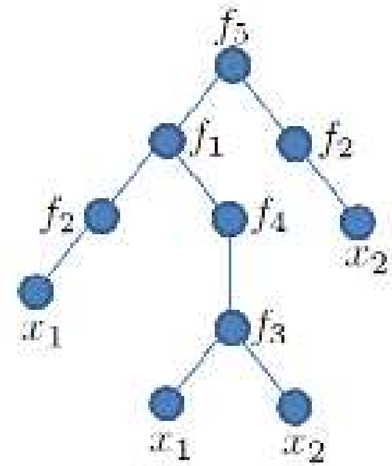


$$\beta_{F_1} \quad = \quad [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$$

Die Blätter $\beta_{0,1} = \beta_{0,2} = []$ stehen für Eingabewerten x_k in $\beta_{0,k}$, $k = 1, 2$.

Algorithmus 1:

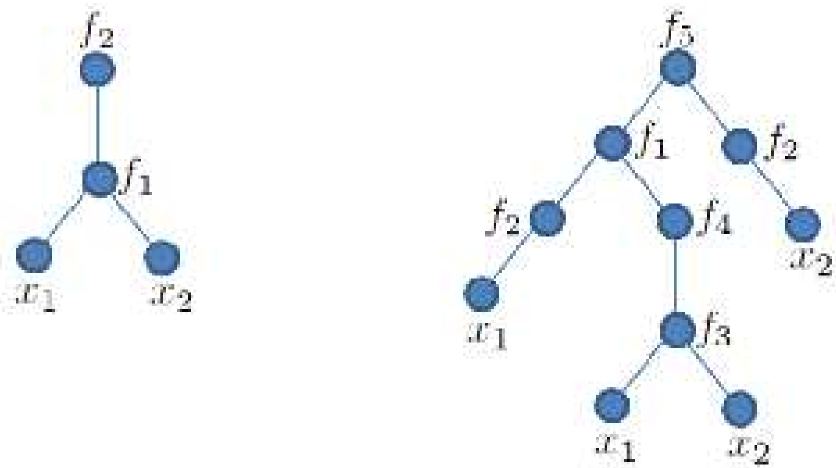




$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_{0,1}} = x_1,\; z^{\beta_{0,2}} = x_2, \quad f^{\beta_1} = f_1,\; z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}})$

$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad f^{\beta_{F_1}} = f_2, \quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1})$

Algorithmus 2:



$$\beta_a = [\beta_{0,ii}], \quad \beta_b = [\beta_c], \quad \beta_c = [\beta_{0,iii}, \beta_{0,iv}] :$$

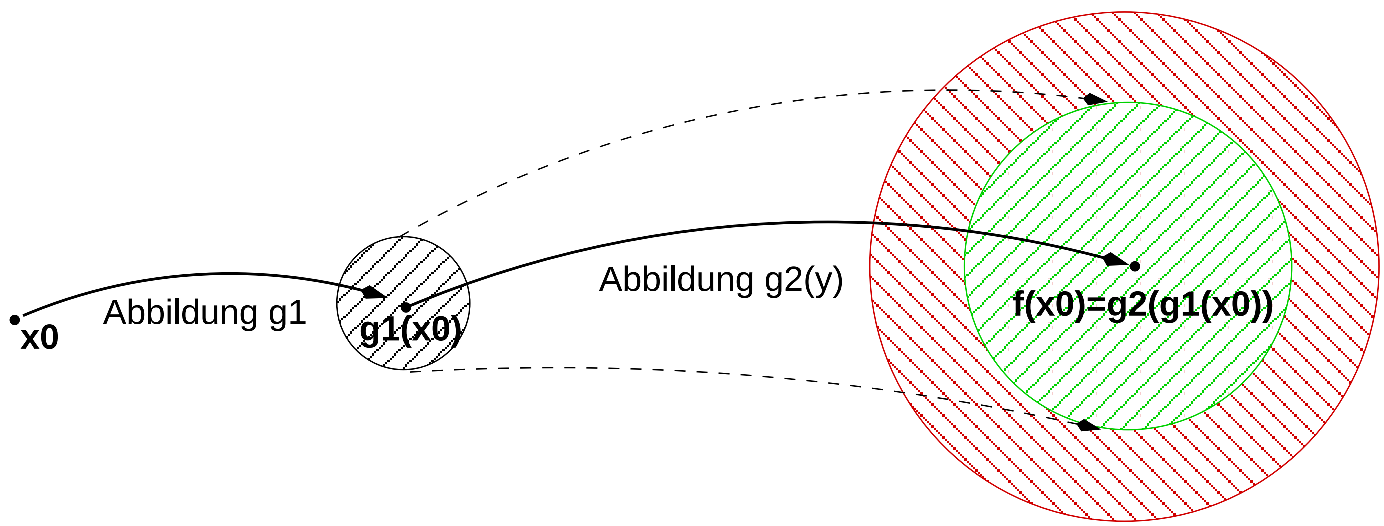
$$z^{\beta_a} = f_2(x_1), \quad z^{\beta_b} = f_4(z^{\beta_c}), \quad z^{\beta_c} = f_3(x_1, x_2)$$

$$\beta_e = [\beta_a, \beta_b], \quad \beta_f = [\beta_d] : \quad z^{\beta_e} = f_1(z^{\beta_a}, z^{\beta_b}), \quad z^{\beta_f} = f_2(x_2)$$

$$\beta_{F_2} = [\beta_e, \beta_f] : \qquad z^{\beta_{F_2}} = f_5(z^{\beta_e}, z^{\beta_f})$$

Rekursive Stabilitätsabschätzung

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis:



Rekursive Stabilitätsabschätzung

Satz 7.6: $h: \ I \mapsto I_g \subset \mathbb{R}$, $g: \ I_g \mapsto \mathbb{R}$, $\quad f = g \circ h: \ I \mapsto \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in I$

Algorithmus zur Auswertung von $h(x_0)$ mit Stabilität σ_h

$$h(x_0) = h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmus zur Auswertung von $f(x_0) = g(h(x_0))$

$$f(x_0) = g \circ h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Die Kondition von $g(y_0)$, $y_0 = h(x_0)$, ist κ_g.

Stabilitätsschranke:

$$\sigma_f \leq 1 + \kappa_g \sigma_h$$

Rekursive Abschätzung der Fehlerverstärkung

Zwischenergebnisse:

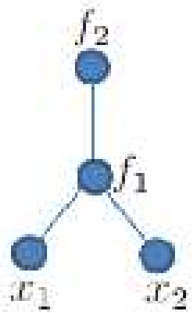
$$z^\beta = \begin{cases} \text{Eingabewert} & \text{falls} \quad \#\beta = 1 \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_m}) & \text{falls} \quad \#\beta = m+1 > 1,\ \beta = [\beta_1, \dots, \beta_m] \end{cases}$$

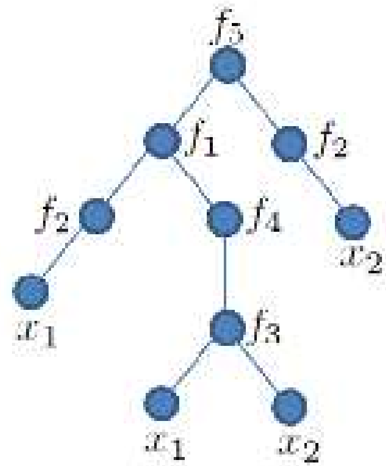
Fehlerverstärkung für Teilbaum:

$$\sigma^\beta \leq \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \#\beta = 1 \\ 1 + \kappa(f^\beta) \max(\sigma^{\beta_1}, \dots, \sigma^{\beta_m}) & \text{falls} \quad \#\beta = m+1 > 1, \\ & \text{und} \quad \beta = [\beta_1, \dots, \beta_m] \end{cases}$$

$\kappa(f^\beta)$: relative Kondition der Auswertung von f^β in $z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_m}$

Algorithmus 1:





$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_{0,1}} = x_1,\ z^{\beta_{0,2}} = x_2, \quad f^{\beta_1} = f_1,\ z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}})$

$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad f^{\beta_{F_1}} = f_2, \quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1})$

Algorithmus 1:

Eingabewerte: $x_1 = 10^{11}$, $x_2 = 10^{11} - 1$.

Algorithmus 1:

Eingabewerte: $x_1 = 10^{11}$, $x_2 = 10^{11} - 1$.

Zwischenergebnis: $z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1$

Algorithmus 1:

Eingabewerte: $x_1 = 10^{11}$, $x_2 = 10^{11} - 1$.

Zwischenergebnis: $z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1$

Zwischenfehlerverstärkung:

$$\sigma^{\beta_1} = 1 + \kappa(f^{\beta_1}) = \kappa(f_1) = 1 + \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11}$$

Algorithmus 1:

Eingabewerte: $x_1 = 10^{11}$, $x_2 = 10^{11} - 1$.

Zwischenergebnis: $z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1$

Zwischenfehlerverstärkung:

$$\sigma^{\beta_1} = 1 + \kappa(f^{\beta_1}) = \kappa(f_1) = 1 + \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11}$$

Endergebnis: $z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = 1^2 = 1$

Algorithmus 1:

Eingabewerte: $x_1 = 10^{11}$, $x_2 = 10^{11} - 1$.

Zwischenergebnis: $z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1$

Zwischenfehlerverstärkung:

$$\sigma^{\beta_1} = 1 + \kappa(f^{\beta_1}) = \kappa(f_1) = 1 + \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 - x_2|} = 2 \cdot 10^{11}$$

Endergebnis: $z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = 1^2 = 1$

Gesamtfehlerverstärkung: $\sigma^{F_1} = 1 + \kappa(f_2)\sigma^{\beta_1} = 1 + 2\sigma^{\beta_1} = 1 + 4 \cdot 10^{11}$

$$\frac{|F(x_1, x_2) - F_1(x_1, x_2)|}{|F(x_1, x_2)|} \le \sigma^{F_1} eps \le (1 + 4 \cdot 10^{11}) \cdot eps \approx 4 \cdot 10^{-5}$$

Kompliziertere Algorithmen

Systematische Analyse des Gesamtfehlers

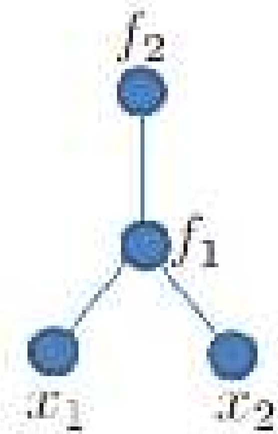
Kompliziertere Algorithmen

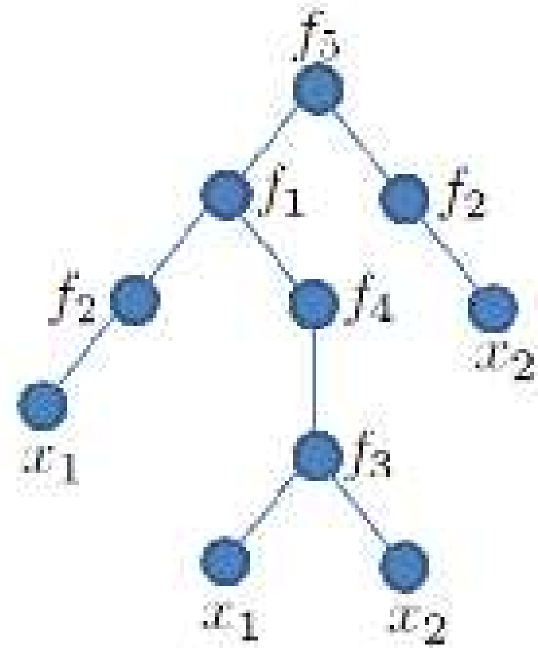
Systematische Analyse des Gesamtfehlers

kann der Computer übernehmen!

Automatische Fehleranalyse

Eingabedaten $x_1, \ldots, x_n$, Elementarfunktionen g_i, Ableitungen g_i'





Vergleich von Algorithmus 1 und 2

Algorithmus 1: $F_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

$$F_1(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$$

Algorithmus 2: $F_1(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2(x_1 x_2)) + x_2^2$

$$F_2(x_1, x_2) = f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big)$$

$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$

Vergleich von Algorithmus 1 und 2

Algorithmus 1: $F_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

$$F_1(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$$

Algorithmus 2: $F_1(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2(x_1 x_2)) + x_2^2$

$$F_2(x_1, x_2) = f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big)$$

$f_1(x,y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x,y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x,y) = x + y$

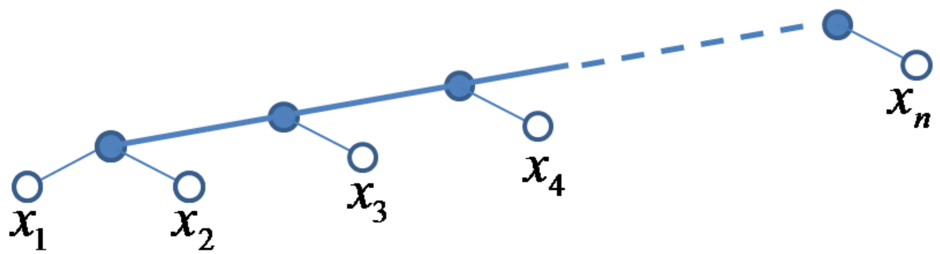
Fehlerverstärkung:

$$\sigma^{F_1} \leq 1 + 4 \cdot 10^{11} \qquad \sigma^{F_2} \leq 44 \cdot 10^{22}$$

Auswertung der Summe positiver Zahlen

$$S = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \quad a_k > 0$$

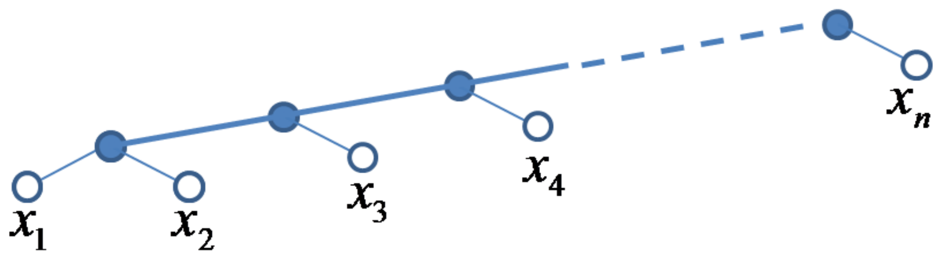
Rekursive Summation: `S = a[1]; for i=2:1:m S = S + a[i]; end`



Auswertung der Summe positiver Zahlen

$$S = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \quad a_k > 0$$

Rekursive Summation: `S = a[1]; for i=2:1:m S = S + a[i]; end`



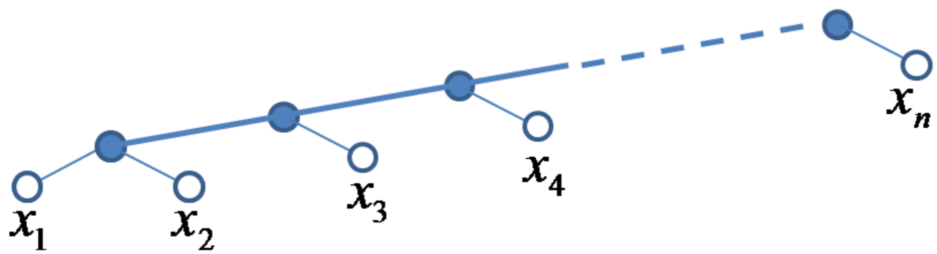
Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_{i+1}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i}, 1\} = 1 + \sigma^{\beta_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad \sigma^{\beta_1} = 1$$

Auswertung der Summe positiver Zahlen

$$S = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \quad a_k > 0$$

Rekursive Summation: `S = a[1]; for i=2:1:m S = S + a[i]; end`



Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_{i+1}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i}, 1\} = 1 + \sigma^{\beta_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad \sigma^{\beta_1} = 1$$

Fehlerverstärkung bei rekursiver Summation: $\sigma_{Rek} \leq n$

Hierarchische Summation

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & & x_6 & & x_7 & & x_8 \\
& \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & \\
& s_1^{(1)} & & & & s_2^{(1)} & & & & s_3^{(1)} & & & & s_4^{(1)} & \\
& & \searrow & & \swarrow & & & & & & \searrow & & \swarrow & & \\
& & & s_1^{(2)} & & & & & & & & s_2^{(2)} & & & \\
& & & & \searrow & & & & & & \swarrow & & & & \\
& & & & & & & s_1^{(3)} & & & & & & &
\end{array}$$

Hierarchische Summation

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & & x_6 & & x_7 & & x_8 \\
& \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & \\
& s_1^{(1)} & & & & s_2^{(1)} & & & & s_3^{(1)} & & & & s_4^{(1)} & \\
& & \searrow & & \swarrow & & & & & & \searrow & & \swarrow & & \\
& & & s_1^{(2)} & & & & & & & & s_2^{(2)} & & & \\
& & & & \searrow & & & & & & \swarrow & & & & \\
& & & & & & & s_1^{(3)} & & & & & & &
\end{array}
$$

Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_i^{(k+1)}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i^{(k)}}, \sigma^{\beta_{i+1}^{(k)}}\}, \qquad \sigma^{\beta_i^{(0)}} = 1$$

Hierarchische Summation

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & & x_6 & & x_7 & & x_8 \\
 & \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & \\
 & s_1^{(1)} & & & & s_2^{(1)} & & & & s_3^{(1)} & & & & s_4^{(1)} & \\
 & & \searrow & & \swarrow & & & & & & \searrow & & \swarrow & & \\
 & & & s_1^{(2)} & & & & & & & & s_2^{(2)} & & & \\
 & & & & \searrow & & & & & & \swarrow & & & & \\
 & & & & & & & s_1^{(3)} & & & & & & &
\end{array}
$$

Rekursive Stabilitätsanalyse

$$
\sigma^{\beta_i^{(k+1)}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i^{(k)}}, \sigma^{\beta_{i+1}^{(k)}}\}, \quad k = 1, \ldots, \log_2(n), \qquad \sigma^{\beta_i^{(0)}} = 1
$$

Hierarchische Summation

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
x_1 \arrow[dr] & & x_2 \arrow[dl] & & x_3 \arrow[dr] & & x_4 \arrow[dl] & & x_5 \arrow[dr] & & x_6 \arrow[dl] & & x_7 \arrow[dr] & & x_8 \arrow[dl] \\
& s_1^{(1)} \arrow[drr] & & & & s_2^{(1)} \arrow[dll] & & & & s_3^{(1)} \arrow[drr] & & & & s_4^{(1)} \arrow[dll] & \\
& & & s_1^{(2)} \arrow[drrrr] & & & & & & & & s_2^{(2)} \arrow[dllll] & & & \\
& & & & & & & s_1^{(3)} & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_i^{(k+1)}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i^{(k)}}, \sigma^{\beta_{i+1}^{(k)}}\}, \quad k = 1, \dots, \log_2(n), \qquad \sigma^{\beta_i^{(0)}} = 1$$

Fehlerverstärkung bei hierarchischer Summation: $\quad \sigma_{Rek} \leq \log_2(n)$

Numerisches Beispiel

Genauigkeit: $\ell = 7$ Dezimalstellen

Problem: Summation von $n_j = 2^J$ Zufallszahlen $a_k \in (0,1)$, $\quad J = 1, \dots, 15$