Aufwand und Komplexität

Vorlesung vom 11.12.15

Komplexität und Effizienz

Aufwand: Anzahl dominanter Operationen (worst-case). Beispiel.

Landau-Symbol $O(n)$. Beispiel.

Definition: Aufwand eines Algorithmus. Komplexität eines Problems.

Summation

Aufwand: rekursive und hierarchische Summation. Komplexität.

Sortieren

Aufwand: TumbSort, BubbleSort und MergeSort. Komplexität.

Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$:

Naiver Algorithmus (Ausprobieren): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen.

Variante (Ausprobieren rückwärts): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen (worst-case!).

Strukturelle Einsicht: Kongruenzen (Gauß 1801), Rekursionssatz.

Euklidischer Agorithmus: Aufwand: $\mathcal{O}(\log(b))$ Divisionen.

Numerische Mathematik

Problem und Eingabedaten

Kondition: Wie wirken sich Eingabefehler aus?

Algorithmus und Eingabedaten

Stabilität: Wie wirken sich Auswertungsfehler in meinem Algorithmus aus?

Aufwand: Wie aufwendig ist mein Algorithmus?

Lineare Gleichungssysteme

$n = 3$ lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme

eine Gleichung für Vektoren mit $n = 3$ Komponenten:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & + \;\; 7x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & + \;\; 8x_3 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

eine Gleichung für Vektoren mit $n = 3$ Komponenten:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & + \ \ 7x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & + \ \ 8x_3 \\ 3x_1 & +6x_2 & +10x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

n lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x \quad = \quad b$$

Matrix-Vektor- und Matrixprodukt

Matrix-Vektor-Produkt:

Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$, Vektor $x = (x_i)_{i=1} \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = ((Ax)_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \ , \qquad (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Matrixprodukt:

Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$AB = ((AB)_{ij})_{ij=1}^n \ , \qquad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Mathematische Modellierung:

diskrete stationärer Prozesse

Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Mathematische Modellierung:

diskrete stationärer Prozesse

Diskretisierung:

mathematische Modelle kontinuierlicher Prozesse:

gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, . . .

Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Mathematische Modellierung:

diskrete stationärer Prozesse

Diskretisierung:

mathematische Modelle kontinuierlicher Prozesse:

gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, . . .

Linearisierung (Newton-Verfahren, . . .)

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

$$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$$

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

$$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

$$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

$\boxed{\text{Berechne } x \in \mathbb{R}^n \text{ aus } Ax = b \text{ zu gegebenen Daten } A \in \mathbb{R}^{n,n},\ b \in \mathbb{R}^n}$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Auswirkung von Auswertungsfehlern (Stabilität)

Kondition, Stabilität und Effizienz

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Auswirkung von Auswertungsfehlern (Stabilität)

Aufwand und mögliche Aufwandsreduktion (Effizienz)

Linearer Raum (Vektorraum)

Definition: Auf der Menge V seien

Addition $a + b : V \times V \to V$, Multiplikation mit Skalaren $\alpha a : \mathbb{R} \times V \to V$

erklärt und haben folgende Eigenschaften

V ist Abelsche Gruppe (Assoziativität, Nullelement, negatives Element, Kommutativität)

Addition und Multiplikation sind verträglich, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$ gilt

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \qquad \text{(Assoziativität)}$$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \,, \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b \qquad \text{(Distributivität)}$$

$$1 \cdot a = a$$

Dann heißt V linearer Raum (Vektorraum) über $\mathbb{R}$.

Normen

Definition 8.1 Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\| \cdot \| : \; V \to \mathbb{R}$$

heißt Norm, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|x\| \geq 0 \;, \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;, \tag{1}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\| \qquad \text{(Homogenität)} \;, \tag{2}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \;. \tag{3}$$

Das Paar $(V, \| \cdot \|)$ heißt normierter Raum.

Beispiele: Vektornormen

$x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$

p–Norm: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$

Maximumsnorm (∞–Norm): $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

Matrixnormen

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in V = \mathbb{R}^{n,n}$, Matrizen mit n Zeilen und n Spalten

jede Vektornorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert eine Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$
(interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ als Vektor im $\mathbb{R}^{n^2}$)

Matrixnormen

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in V = \mathbb{R}^{n,n}$, Matrizen mit n Zeilen und n Spalten

jede Vektornorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ induziert Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$
(interpretiere $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ als Vektor im $\mathbb{R}^{n^2}$)

Verträglichkeit der Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ mit Matrix–Vektor–Multiplikation:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$$

$\|A\|_M$ ist eine obere Schranke für die Längenänderung.

Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

Definition 8.8 Es sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n},$$

die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ definiert.

Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

Definition 8.8 Es sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,, \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n}\,,$$

die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ definiert.

Bemerkung: Für zugehörige Matrixnormen gilt

- $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm.
- $\|Ax\| \leq \|A\|_M\ \|x\|$
- $\|AB\|_M \leq \|A\|_M\ \|B\|_M \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n},$ (Submultiplikativität)
- Die Norm der Einheitsmatrix I ist $\|I\|_M = 1$.

Die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm

Satz 8.10 (Zeilensummennorm) Die Matrixnorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,, \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} \,,$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

Die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm

Satz 8.10 (Zeilensummennorm) Die Matrixnorm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ , \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n} \ ,$$

gehört zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung:
Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_M$ die zugehörige Matrixnorm.
Dann existiert ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^*\| = 1$ und $\|Ax^*\| = \|A\|_M$.

Konvergenz in normierten Räumen

Definition 8.4 Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\left(x^{(\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge. Die Folge heißt konvergent gegen $x \in V$, also

$$x^{(\nu)} \to x \ , \qquad \nu \to \infty \ ,$$

falls

$$\|x - x^{(\nu)}\| \to 0 \ , \qquad \nu \to \infty \ .$$

Konvergenz in normierten Räumen

Definition 8.4 Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\left(x^{(\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge. Die Folge heißt konvergent gegen $x \in V$, also

$$x^{(\nu)} \to x \;, \qquad \nu \to \infty \;,$$

falls

$$\|x - x^{(\nu)}\| \to 0 \;, \qquad \nu \to \infty \;.$$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$, Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$

$$\left(x^{(\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \to x \in \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad x_i^{(\nu)} \to x_i \;, \quad i = 1, \ldots, n$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerungen: $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$ und $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\infty$

$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerungen: $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$ und $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\infty$

$$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \to 0$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerungen: $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$ und $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\infty$

$$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow x_i^{(\nu)} \to x_i \ , \quad i = 1, \ldots, n$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerungen: $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$ und $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\infty$

$$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow x_i^{(\nu)} \to x_i \ , \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerungen: $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$ und $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\infty$

$$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow x_i^{(\nu)} \to x_i \ , \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{C}{c} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

Satz 8.5 Es sei V ein endlichdimensionaler linearer Raum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf V. Dann existieren $c, C \in \mathbb{R}$, so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in V \ .$$

Beweis:
Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

Folgerungen: $V = \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm $\|\cdot\|$ und $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\infty$

$$x^{(\nu)} \to x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \to 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow x_i^{(\nu)} \to x_i \ , \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{C}{c} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{C}{c}\|A\|_\infty < \infty$$