Kapitel 3
Rationale Zahlen

Unendliche viele rationale Zahlen liegen allein zwischen 0 und 1 und doch kann man mit ihnen rechnen wie mit ganzen Zahlen. Es dauert nur ein bißchen länger.

3.1 Konstruktion von $\mathbb{Q}$ durch Abschluß von $\mathbb{Z}$ unter Division

Die Konstruktion der rationalen Zahlen erfolgt in völliger Analogie zum Vorgehen in Abschnitt 1.2.1. Ausgangspunkt ist nun die Tatsache, daß die Gleichung

$$m \cdot x = n \tag{3.1}$$

mit n, $m \in \mathbb{Z}$ im allgemeinen keine Lösung in $x \in \mathbb{Z}$ hat. Bei dem Versuch, die Lösung von (3.1) durch das Paar (n,m) zu charakterisieren, muß man dieses Mal beachten, daß die Gleichung $m'x = n'$ dieselbe Lösung hat, falls $nm' = n'm$ ist. Auf der Menge aller Paare $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$ definieren wir daher die Äquivalenzrelation

$$(n,m) \cong (n',m') \quad \Longleftrightarrow \quad nm' = n'm.$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen besteht nun aus allen Äquivalenzklassen $[n,m]$ dieser Relation. Hätten wir übrigens den Nenner $m = 0$ nicht von vornherein ausgeschlossen, so wäre $(n,m) \cong (0,0)$ für alle n, $m \in \mathbb{Z}$ und daher [0,0] die einzige rationale Zahl.

Anstelle von Paaren sprechen wir von Brüchen, und wir sind es gewohnt, $\frac{n}{m}$ anstelle von (n,m) zu schreiben. Zwei Brüche $\frac{n'}{m'}$ und $\frac{n}{m}$ gehören genau dann zu derselben Äquivalenzklasse, wenn sie durch Erweitern oder Kürzen ineinander überführt werden können. Als Repräsentant einer Äquivalenzklasse wird meist der Bruch $\frac{n}{m}$ mit teilerfremden Zahlen n, m verwendet, also beispielsweise

$$\frac{1}{3} \in [12345, 37035]. \tag{3.2}$$

Außerdem wird noch die Abkürzung $n = \frac{n}{1}$ eingeführt. Die Erweiterung der Addition und Multiplikation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$ erfolgt durch die bekannten Bruchrechenregeln

$$\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} = \frac{nm' + n'm}{mm'}\,, \qquad \frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'} = \frac{nn'}{mm'}\,. \tag{3.3}$$

Kommutativität, Assoziativität und das Distributionsgesetz bleiben dabei erhalten.

3.2 Zifferndarstellung

Fügt man neben dem Vorzeichen $-$ noch den Bruchstrich / als ein weiteres Element einer Ziffernmenge $\mathscr{Z}$ eines Ziffernsystems zur Darstellung von $\mathbb{N}$ hinzu, so erhalten wir ähnlich wie Satz 1.5 das folgende Resultat.

Satz 3.1. *Jedes Ziffernsystem zur Darstellung von $\mathbb{N}$ induziert ein Ziffernsystem zur Darstellung von $\mathbb{Q}$.*

Von der entsprechenden Darstellung mit Hilfe des Dezimalsystems haben wir in (3.2) schon Gebrauch gemacht. Offenbar ist jede natürliche Zahl eine rationale Zahl, aber nicht umgekehrt. Dennoch folgt aus Satz 3.1, Satz 1.1 und der Beobachtung, daß jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge wieder abzählbar ist:

Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen ist abzählbar.

Jeder rationalen Zahl kann man also eine genau eine natürliche Zahl zuordnen und umgekehrt. Es gibt also genauso viele Elemente in $\mathbb{Q}$ wie in $\mathbb{N}$.

3.3 Dezimal- und Dualbrüche

In Erweiterung der Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen definieren wir die *Dezimalbrüche*

$$z_n \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i \, 10^i , \qquad z_i \in 0, \ldots, 9, \quad n, m \in \mathbb{N} . \tag{3.4}$$

Vorhandene Methoden zur Addition und Multiplikation von Dezimalzahlen lassen sich im wesentlichen auf Dezimalbrüche übertragen (man muß nur auf das Komma achten). Im Vergleich zu der komplizierten Addition von Brüchen ist das ein großer Vorteil.

Offenbar ist jeder Dezimalbruch ein Bruch, denn Erweitern liefert

$$\sum_{i=1}^{m} z_{-i} \, 10^{-i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} z_{-i} \, 10^{m-i}}{10^m} .$$

Umgekehrt ist aber nicht jeder Bruch ein Dezimalbruch. Beispielsweise liefert sukzessive Division die Darstellung

$$\frac{1}{3} = 0,333... .$$

Dies ist zwar ein Ausdruck der Form (3.4) allerdings mit $m = \infty$. Den können wir in eine *geometrische Reihe* umformen, denn es gilt ja

$$0,333... = 0,3 \left(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots \right) = 0,3 \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} .$$

Den Grenzwert der geometrischen Reihe erhält man für beliebige $q > 1$ aus

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m} q^{-i} = \lim_{m \to \infty} \frac{1 - q^{-(m+1)}}{1 - q^{-1}} = \frac{1}{1 - q^{-1}} ,$$

und Einsetzen von $q = 10$ liefert

$$0,333... = 0,3 \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} = 0,3 \frac{1}{1 - 10^{-1}} = \frac{1}{3}.$$

Auf diese Weise kann man *periodische Dezimalbrüche* mit beliebiger Periodenlänge in rationale Zahlen umrechnen. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} 0,123123123... &= 0,123(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \cdots) = 0,123 \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-3i} \\ &= 0,123 \frac{1}{1 - 10^{-3}} = \frac{123}{999}, \end{aligned}$$

ein periodischer Dezimalbruch mit Periodenlänge 3. Wir schreiben kurz

$$0,\overline{123} = 0,123123123\ldots\,.$$

Jeder periodische Dezimalbruch ist also eine rationale Zahl. Umgekehrt lässt sich auch jede rationale Zahl als periodischer Dezimalbruch darstellen. Der Grund liegt darin, daß bei Durchführung des Euklidischen Algorithmus[1] nur endlich viele verschiedene Reste r auftreten können und sich bei Wiederholung eines Restes auch die vorangegangene Ziffernfolge wiederholt. Im Falle $\frac{1}{3}$ tritt z.B. nur der Rest $r = 1$ auf. Im folgenden Beispiel erhalten wir alle möglichen von Null verschiedenen Reste $r = 1,3,2,6,4,5$ bis sich $r = 1$ wiederholt

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}\,.$$

Bleibt kein Rest, so haben wir es mit einem endlichen Dezimalbruch zu tun. In diesem Fall könnte man von der Periode $\overline{0}$ sprechen. Aber mit gleichem Recht auch von der Periode $\overline{9}$, denn es gilt

$$0,\overline{9} = 0,9\sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} = 0,9\frac{1}{1-10^{-1}} = 1,\overline{0}\,.$$

Um Eindeutigkeit zu gewährleisten, wird die Periode $\overline{0}$ zugunsten von $\overline{9}$ verboten. Die Darstellung von 1 als periodischer Dezimalbruch ist also $0,\overline{9}$. Wir fassen zusammen:

Satz 3.2. *Jede rationale Zahl lässt sich in eindeutiger Weise als periodischer Dezimalbruch darstellen.*

Leider ist diese Einsicht eher theoretischer Natur: Das Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen ist noch komplizierter als die Anwendung der üblichen Bruchrechenregeln.

Aus alter Gewohnheit haben wir uns auf das Dezimalsystem bezogen, obwohl wir auch ein Positionssystem zu jeder anderen Basis $q > 1$ hätten wählen können. Für $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ kann man nämlich in direkter Analogie zu (3.4) die *q-adischen Brüche*

$$z_n \cdots z_0,\, z_{-1} \cdots z_{-m} \;=\; \sum_{i=-m}^{n} z_i\, q^i\,, \qquad z_i \in \{0,\,1,\ldots,q-1\},\quad n,m \in \mathbb{N}\,, \tag{3.5}$$

definieren. Satz 3.2 gilt in gleicher Weise für q-adische Brüche. Man sollte allerdings nie vergessen, daß ein endlicher q_1-adischer Bruch im allgemeinen kein endlicher q_2-adischer Bruch ist. Beispielsweise gilt nämlich

$$0,1_{10} \;=\; 0,0\overline{0011}_2\,. \tag{3.6}$$

Beim Umrechnen von Dezimalbrüchen in Dualbrüche ist also Vorsicht geboten.

3.4 Praktische Realisierung

Rationale Zahlen lassen sich im Computer direkt als Brüche, also als Paare von Integerzahlen n, m, speichern. Leider ist es mit einer fest vorgegebenen Stellenzahl von jeweils N Bits unmöglich, die unendlich vielen rationalen Zahlen in einem noch so kleinen Intervall $[r_{\min}, r_{\max}]$ darzustellen. Es bleibt also keine andere Wahl, als für Zähler n und Nenner m jeweils eine variable Stellenzahl vorzusehen, die den aktuellen Erfordernissen dynamisch angepasst wird. Wie in der Schule wird dabei versucht nach jedem Rechenschritt zu kürzen, um Speicherplatz zu sparen. Auf diese Weise kann ein Computer mit rationalen Zahlen exakt rechnen, wie mit Intergerzahlen auch. Allerdings steigt der Zeitaufwand pro Rechenoperation erheblich. Daher sind spezielle Datentypen für rationale Zahlen auf Computer-Algebra-Systeme wie MATHEMATICA oder MAPLE und auf Spezialanwendungen beschränkt. Aber es geht.

---

[1] Um Mißverständnisse zu vermeiden sei hier angemerkt, dass der Begriff Euklidischer Algorithmus meistens den recht bekannten Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen bezeichnet (vgl. Algorithmus 4.13). Hier ist lediglich die Abfolge der Operationen bei der schriftlichen Division gemeint, bei der jede weitere Stelle des zu berechnenden Dezimalbruchs daraus entsteht, dass man den vorhergehenden Rest mit 10 multipliziert, das Ergebnis durch den Nenner teilt, um dann mit dem Rest dieser Operation iterativ weiter zu machen.

3.5 Aufgaben

Aufgabe 3.1 *Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:*

(i) *Jeder endliche Dualbruch ist auch ein endlicher Dezimalbruch.*
(ii) *Jeder endliche Dezimalbruch ist auch ein endlicher Dualbruch.*

Aufgabe 3.2 *Lösen Sie die folgenden Rechenaufgaben im Dualsystem ohne dabei in das Dezimalsystem umzurechnen:*

$$a) \quad 0{,}1100101_2 \cdot 10101{,}111_2 \qquad b) \quad \frac{10_2}{110_2} + \frac{101_2}{10100_2}$$