Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Christof Schütte, Rudolf Huttary

10. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WS 2016/2017

Abgabe: Montag 30.1.2017 (10:00)

1. Aufgabe (12 PP)
Bekanntlich lässt sich jede natürliche Zahl N als Produkt von Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ darstellen, d.h.

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Die Darstellung ist – bis auf die Reihenfolge der Faktoren – eindeutig. Viele kryptografische Verfahren basieren darauf, dass es einfach ist, zwei große Primzahlen zu multiplizieren, aber sehr schwierig, aus dem Produkt wieder die beiden Faktoren zu gewinnen (Für nähere Informationen googlen Sie nach den Stichworten RSA-Technologie, public-keys oder werfen Sie einen Blick in die vorlesungsbegleitende e-learning Software).

a) Schreiben Sie eine möglichst effektive Matlab-Funktion, die bei Eingabe einer natürlichen Zahl N die Primfaktoren p_k von N ausgibt. Dabei dürfen Sie die Befehle `mod` und `rem` verwenden, aber nicht die Befehle `primes`, `isprime` oder `factor`. Testen Sie Ihr Programm für fünf verschieden große Werte und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der eingebauten Matlab-Funktion `factor`.

b) Erweitern Sie Ihre Matlab-Funktion so, dass bei jedem Aufruf zusätzlich zur Primzahlzerlegung auch $a(N)$ ausgegeben wird. Als Aufwandsmaß verwenden Sie

$$a(N) = \text{Anzahl der Operationen vom Typ } \texttt{mod(x,y)} \text{ bzw. } \texttt{rem(x,y)}.$$

c) Schreiben Sie ein zweites Programm, das die Funktion Ihres ersten Programms für alle $N = 2, 3, \ldots, 1000$ aufruft. Plotten Sie ein Schaubild, das den Aufwand $a(N)$ in Abhängigkeit von N darstellt.

d) Interpretieren Sie dieses Schaubild.

2. Aufgabe (4 TP)
Gegeben sind die Matrix A und die beiden Vektoren b_1 und b_2,

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \qquad b_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \qquad b_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

wobei $0 < \varepsilon \ll 1$ als Eingabe aufgefasst werden soll. Ferner sei eine Matrixnorm für quadratische Matrizen gegeben als

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

a) Berechnen Sie die Kondition $\kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

b) Berechnen Sie die Lösungen x_1 und x_2 der beiden linearen Gleichungssysteme $Ax_1 = b_1$ und $Ax_2 = b_2$. Beachten Sie dabei, dass die Matrix A und die rechte Seite b_1 den gemeinsamen Eingabewert ε haben; sie sind miteinander verkoppelt.

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse mit Hinblick auf den Wert von $\kappa(A)$.

3. Aufgabe (4 PP)
Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems Ax=B, mit

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 1 \\ b+2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Führen Sie den Algorithmus dazu explizit per Hand durch.
Was beobachten Sie in Abhängigkeit von den Parametern a und b? Erklären Sie die Beobachtung.

Allgemeine Hinweise

Die Aufgaben sollten in Zweiergruppen gelöst und bei Ihrem Tutor abgegeben werden. Programmcode senden Sie bitte als **lauffähiges (!)** Matlab-Script per Email an Ihren Tutor. (`Tony Schwedek <tony.schwedek@fu-berlin.de>, Felix Mann <felix.mann@fu-berlin.de>`).