Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Christof Schütte, Rudolf Huttary

8. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WS 2016/2017

Abgabe: Montag 9.1.2017 (10:00)

1. Aufgabe (4 Zusatz TP + 12 Zusatz PP)
Es sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor von Zufallszahlen ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) und

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

der Mittelwert von x. Zur Berechnung der sogenannten *Stichprobenvarianz* stehen die drei Formeln

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \\ v_2 &= \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\bar{x}^2\right) \\ v_3 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - \bar{x}^2\right) \end{aligned}$$

zur Verfügung.

a) Zeigen Sie, dass $v_1 = v_2 = v_3$.

b) Welche der drei Formeln ist im Hinblick auf die numerische Stabilität die günstigste? Sie brauchen keinen exakten Beweis zu geben. Eine kurze Begründung genügt.

c) Schreiben Sie eine Funktion `v = varianz(n)`, die **ohne Verwendung einer Schleife** (d.h. ohne die Befehle `for ... end` oder `while ... end`) und **ohne eine Rekursion** folgendes tut:

- Mit

```
x = randn(1,n) + 10000;
```

wird ein Vektor von n Zufallszahlen x_i erzeugt, die "in der Nähe von 10000" liegen. (Die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist der Funktion bei Aufruf zu übergeben.)

- Dann wird der Mittelwert von x berechnet (ohne den Befehl `mean` zu verwenden).
- Danach werden die Werte von v_1, v_2 und v_3 berechnet.
- Zur Berechnung der Stichprobenvarianz gibt es in Matlab den Befehl `var(x)`. Die drei Fehler $|v_k - \texttt{var(x)}|$ werden von der Funktion schließlich als Vektor zurückgegeben.

d) Schreiben Sie Testcode, der die Funktion `varianz()` nacheinander für

$$n = 10,\ n = 100,\ n = 1000,\ \ldots\ ,\ n = 100000$$

aufruft. Dazu dürfen Sie eine Schleife verwenden. Stellen Sie die Fehler $|v_1 - \texttt{var(x)}|$, $|v_2 - \texttt{var(x)}|$ und $|v_3 - \texttt{var(x)}|$ in Abhängigkeit von n dar. Verwenden Sie dazu den Befehl `loglog`. Dieser Befehl wird genauso aufgerufen wie `plot`, zeichnet jedoch einen Graphen mit logarithmischen Achsen. Beschriften Sie Ihr Bild mit Hilfe des Befehls `legend`.

e) Diskutieren Sie kurz das Ergebnis der Plots im Hinblick auf Ihre Vermutung aus b).

Hinweise:

- Für die Berechnung einer Summe ist der Befehl `sum` hilfreich.
- Den Absolutbetrag einer Zahl erhält man mit `abs`.
- Hilfreich ist auch der Operator " `:` ". Beispiel: Ist $A \in \mathbb{R}^{k \times j}$ eine Matrix und $y \in \mathbb{R}^{1 \times j}$ ein Zeilenvektor, so schreibt der Befehl `A(3,:)=y` den Vektor y in die dritte Zeile von A.
- `loglog` hat Schwierigkeiten mit der Ausgabe von Nullwerten. Ignorieren Sie dies.

2. Aufgabe (3 Zusatz TP)
Zeigen Sie für $x \to \infty$ und $p, q \in \mathbb{R}$

a) $x^p = o(x^q)$ mit $p < q$

b) $x^p = o(\mathrm{e}^x)$

c) $\log x = o(x^q)$ mit $q > 0$

3. Aufgabe (6 Zusatz TP)
Finden Sie eine geeignete Umformung für die untenstehenden Ausdrücke, so dass die Auswertung möglichst stabil ist ($x > 0$). Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

a)

$$\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x) - x}{x^2 - 1}$$

b)

$$\frac{3x^2 + 5}{5 + x} - \frac{1 - 3x}{1 + 3x}$$

c)

$$\sqrt{ax + b} - \sqrt{a^3x^3 + 3a^2x^2b + 3axb^2 + b^3}$$

4. Aufgabe (4 Zusatz TP)
Am Weihnachtsabend spielt Opa Kurt mit seinen beiden Enkeln Peter und Gustav „Stille Post“. Es geht darum, die Chancen zu erhöhen, daß zum Schluß noch etwas Verständliches herauskommt. Soll man den etwas schwerhörigen Kurt dazu ans Ende oder an den Anfang setzen?
Hinweis: Kurt ist schwerhörig. Er verstärkt also jeden Fehler um den Faktor $\sigma_K > 1$. Kurt versteht auch nicht alles, was er hört. Er macht also zusätzlich einen Fehler $\varepsilon_K > 1$. Die beiden Enkel hören wunderbar, ihr Verstärkungsfaktor ist $\sigma_E = 1$. Weil sie aber auch nicht alles verstehen, was sie hören, kommt auch bei ihnen jeweils ein Fehler ε_E hinzu.

Allgemeine Hinweise

Die Aufgaben sollten in Zweiergruppen gelöst und bei Ihrem Tutor abgegeben werden. Programmcode senden Sie bitte als **lauffähiges (!)** Matlab-Script per Email an Ihren Tutor. (`Tony Schwedek <tony.schwedek@fu-berlin.de>, Felix Mann <felix.mann@fu-berlin.de>`).