COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2016/17

Lineare Gleichungssysteme, Teil 1

10. Vorlesung

20.1.12

Komplexität und Effizienz
Aufwand: maximale Anzahl dominanter Operationen (worst-case).
Beispiel.
Landau-Symbole und Grenzwerte. Beispiel.

Definition:
Komplexität eines Problems. Effizienz eines Algorithmus.

Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von a $\geq$ b:
Naiver Algorithmus (Ausprobieren): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen.
Variante (Ausprobieren rückwärts): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen (worst-case!).

Strukturelle Einsicht: Kongruenzen (Gauß 1801), Rekursionssatz.
Euklidischer Agorithmus: Aufwand: $\mathcal{O}(\log(b))$ Divisionen.

$n = 3$ lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

$n = 3$ lineare Gleichungen für $n = 3$ Unbekannte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x \quad = \quad b$$

eine Gleichung für Vektoren mit $n = 3$ Komponenten:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & + & 7x_3 \\ 2x_1 & +5x_2 & + & 8x_3 \\ 3x_1 & +6x_2 & & +10x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x \quad = \quad b$$

Matrix-Vektor-Produkt:

Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$, Vektor $x = (x_i)_{i=1} \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = ((Ax)_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n \,, \qquad (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Matrix-Vektor-Produkt:

Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$, Vektor $x = (x_i)_{i=1} \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = ((Ax)_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \,, \qquad (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Matrixprodukt:

Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$AB = ((AB)_{ij})_{ij=1}^n \,, \qquad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Satz:
Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ , \quad x \neq 0 \ ,$$

andernfalls singulär.

Satz:
Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ , \quad x \neq 0 \ ,$$

andernfalls singulär.

Ist A regulär, so gilt $\det(A) \neq 0$ und es existiert eine eindeutig bestimmte Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ von A mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \ ,$$

Satz:
Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt regulär, falls

$$Ax \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ , \quad x \neq 0 \ ,$$

andernfalls singulär.

Ist A regulär, so gilt $\det(A) \neq 0$ und es existiert eine eindeutig bestimmte Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ von A mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \ ,$$

und das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x = A^{-1}b$.

Ganz dumme Idee zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Berechne die Inverse zu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der $i$ten Zeile und $j$ten Spalte hervorgeht.

Ganz dumme Idee zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Berechne die Inverse zu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der $i$ten Zeile und $j$ten Spalte hervorgeht.

Aufwand der naiven Berechnung: $\mathcal{O}(n!)$

Ganz dumme Idee zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Berechne die Inverse zu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der $i$ten Zeile und $j$ten Spalte hervorgeht.

Aufwand der naiven Berechnung: $\mathcal{O}(n!)$

Genauere Analyse ergibt Instabilität des Algorithmus!

Ganz dumme Idee zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Berechne die Inverse zu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

wobei $\tilde{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der $i$ten Zeile und $j$ten Spalte hervorgeht.

Aufwand der naiven Berechnung: $\mathcal{O}(n!)$

Genauere Analyse ergibt Instabilität des Algorithmus!

In der numerische Mathematik vermeidet man, wenn immer es geht, die Berechnung der Inversen!

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Problem:

Berechne $x \in \mathbb{R}^n$ aus $Ax = b$ zu gegebenen Daten $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{b} \approx b$ (Kondition)

Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Auswirkung von Auswertungsfehlern (Stabilität)

Aufwand und mögliche Aufwandsreduktion (Effizienz)

Schreibweise mit erweiterter Matrix

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x \qquad = \qquad b$$

Schreibweise mit erweiterter Matrix

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad x \quad = \quad b$$

erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

eliminieren von x_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 * 1.\ \text{Zeile} \\ -3 * 1.\ \text{Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right)$$

eliminieren von x_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 * 1.\ \text{Zeile} \\ -3 * 1.\ \text{Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right)$$

eliminieren von x_2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -11 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2 * 2.\ \text{Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Gestaffeltes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \qquad x = z$$

Gestaffeltes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$R \qquad x = z$$

Lösung durch Rückwärtssubstitution:

$$\begin{pmatrix} x_1 & +4x_2 & +7x_3 \\ & -3x_2 & -6x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \implies x = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -31/3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L \qquad R \qquad = \qquad A$$

LR–Zerlegung

Der 1. Eliminationsschritt

Voraussetzung: Pivotelement $a_{11} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) \qquad\qquad (A^{(1)}|b^{(1)})$$

Der 1. Eliminationsschritt

Voraussetzung: Pivotelement $a_{11} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) \qquad\qquad (A^{(1)}|b^{(1)})$$

Berechnung von $(A^{(0)}|b^{(0)}) \rightarrow (A^{(1)}|b^{(1)})$:

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}\,, \qquad b_1^{(1)} = b_1\,,$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \ell_{i1} a_{1j}\,, \qquad b_i^{(1)} = b_i - \ell_{i1} b_1\,, \qquad \ell_{i1} := \frac{a_{i1}}{a_{11}}\,,$$

Gaußsche Elimination

for $k = 1 : n-1$ do

$\{$

for $i = k+1 : n$ do (falls $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$!)

$\{$

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \; ; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \ell_{ik} b_k^{(k-1)} \; ; \quad a_{ik}^{(k)} = 0 \; ;$$

for $j = k+1 : n$ do

$\{$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k-1)} \; ;$$

$\}$

$\}$

$\}$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [1+1+ \sum_{j=k+1}^{n} 1]$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (2+n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (2+n-k)(n-k)
\end{aligned}
$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (2+n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (2+n-k)(n-k) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (2+j)j = 2\sum_{j=1}^{n-1} j + \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = n(n-1) + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)
\end{aligned}
$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (2+n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (2+n-k)(n-k) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (2+j)j = 2\sum_{j=1}^{n-1} j + \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = n(n-1) + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\
&= n(n-1)\left(\frac{1}{3}n + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)
\end{aligned}
$$

Summenformeln

$$\sum_{k=m+1}^{n} 1 = n - m$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

Aufwandsbetrachtungen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Aufwand der Rücksubstitution:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1+\sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}(n^2+n)$$

Aufwandsmaß: Anzahl der Punktoperationen

Aufwand des Gaußschen Algorithmus:

Aufwand des Eliminationsschritts:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1+1+\sum_{j=k+1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Aufwand der Rücksubstitution:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}(n^2+n)$$

Gesamtaufwand: $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Rückwärtssubstitution

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Gestaffeltes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(n-1)} \\ b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Algorithmus (Rückwärtssubstitution)

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}^{(n-1)}} b_n^{(n-1)}$$

for $i = n-1 : (-1) : 1$ do

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(n-1)}} \left(b_i^{(n-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n-1)} x_j \right)$$

Eliminationsmatrizen

$$G_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ell_{k+1,k} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ell_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Eliminationsmatrizen

$$G_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ell_{k+1,k} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ell_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Lemma: Mit $A^{(0)} = A$ und $b^{(0)} = b$ gilt

$$A^{(k)} = (I - G_k)A^{(k-1)}, \quad b^{(k)} = (I - G_k)b^{(k-1)}, \qquad k = 1, \ldots, n-1 .$$

Satz: Ist der Gaußsche Algorithmus für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ durchführbar (d.h. erhält man Pivotelemente $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$) und ergeben sich dabei die Eliminationsmatrizen $G_1, \ldots, G_{n-1}$, so gilt

$$A = LR \quad \text{mit} \quad L = I + \sum_{k=1}^{n-1} G_k \,, \quad R = \prod_{k=1}^{n-1} (I - G_{n-k}) A$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \,, \quad R = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \,.$$

Linearer Raum (Vektorraum)

Definition: Auf der Menge V seien

- Addition $\quad a + b : V \times V \to V$
- Multiplikation mit Skalaren $\quad \alpha a : \mathbb{R} \times V \to V$

erklärt und haben folgende Eigenschaften:

- V ist Abelsche Gruppe (Assoziativität, Nullelement, negatives Element, Kommutativität)
- Addition und Multiplikation sind verträglich, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$ gilt
  - $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ (Assoziativität)
  - $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b\,, \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b$ (Distributivität)
  - $1 \cdot a = a$ (Einselement)

Dann heißt V linearer Raum (Vektorraum) über $\mathbb{R}$.

Definition:
Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \; V \to \mathbb{R}$$

heißt Norm, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|x\| \geq 0 \,, \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,, \tag{1}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\| \qquad \text{(Homogenität)} \,, \tag{2}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \,. \tag{3}$$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Beispiele: Vektornormen

Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Typische Normen:

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$

Beispiele: Vektornormen

Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Typische Normen:

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$
- p–Norm: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$

Beispiele: Vektornormen

Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$

Typische Normen:

- Euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$
- p–Norm: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$
- Maximumsnorm (∞–Norm): $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$