COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

Christof Schütte
Wintersemester 2016/17

Computer-orientierte Mathematik

5. Vorlesung - Christof Schuette

25.11.16

Relative Kondition der Grundrechenarten:
Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate. Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung). Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Relative Kondition der Grundrechenarten:
Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate. Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung). Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:
Die absolute Kondition κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathrm{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \ .$$

Relative Kondition der Grundrechenarten:
Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate. Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung). Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:
Die absolute Kondition κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \le \kappa_{\mathrm{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \ .$$

Sätze zur absoluten Kondition:
Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $\kappa_{\mathrm{abs}} = |f'(x_0)|$.
Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so gilt $\kappa_{\mathrm{abs}} \le L$.
Für geschachtelte Funktionen $f(x) = g(h(x))$ gilt
$\kappa_{\mathrm{abs}} \le \kappa_{\mathrm{abs}}(g, y_0)\ \kappa_{\mathrm{abs}}(h, x_0)$.

gegeben: Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$, $\quad 0 \neq x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$

Problem: $\quad (*)$

$$\boxed{\text{Auswertung von } f \text{ an der Stelle } x_0}$$

Definition (Relative Kondition)
Die relative Kondition κ_{rel} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|) \; .$$

Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{rel} vor, so wird $\kappa_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathrm{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathrm{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|)$$

Relative versus absolute Kondition

absolute Kondition

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\mathrm{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

relative Kondition

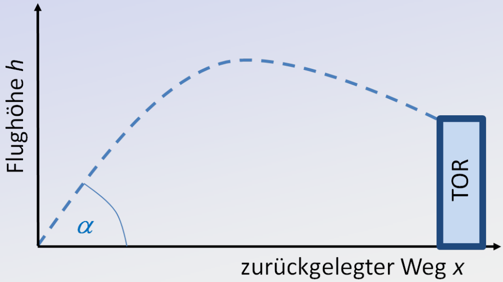
$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\mathrm{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|)$$

Satz:
Es gilt

$$\kappa_{\mathrm{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \kappa_{\mathrm{abs}}$$

Ronaldinho

Flugkurve

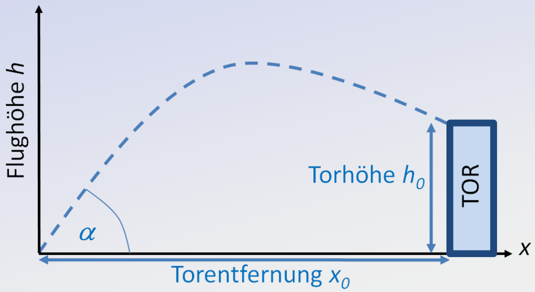


Flughöhe und zurückgelegter Weg in Abhängigkeit von der Zeit t, der Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$\begin{aligned} h(t) &= vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \\ x(t) &= vt\cos\alpha \end{aligned}$$

g: Fallbeschleunigung $= 9.81 m/s^2$

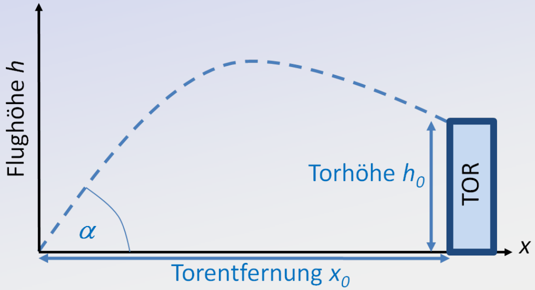
Überflughöhe



Überflughöhe in Abhängigkeit von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v, \alpha) = x_0 \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x_0^2}{v^2 \cos^2 \alpha}$$

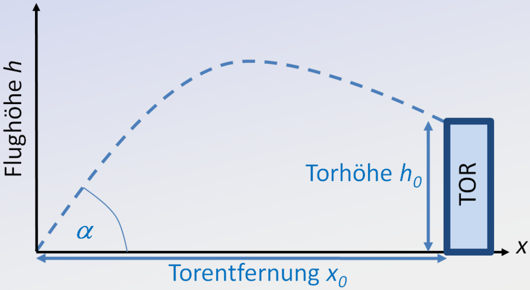
g: Fallbeschleunigung $= 9.81 m/s^2$



Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0, \alpha_0) = h_0 = 2.50m$$

$$g = 9.81m/s^2 \quad \Rightarrow \quad \text{z.B. } \alpha_0 = 45^o,\ v_0 = 13.64m/s$$



Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h = 2.50m \pm 0.04m$$

g: Fallbeschleunigung $= 9.81 m/s^2$

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h = 2.50m \pm 0.04m$$

Maximale "Eingabefehler" Δv und $\Delta\alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04$?

Kondition

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h = 2.50m \pm 0.04m$$

Maximale "Eingabefehler" Δv und $\Delta\alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04$?

Vereinfachung: Perfekter Abschusswinkel $\Delta\alpha = 0$

$$|\Delta h(\Delta v)| = |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| \leq 0.04m$$

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschw. v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h = 2.50m \pm 0.04m$$

Maximale "Eingabefehler" Δv und $\Delta\alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04$?

Vereinfachung: Perfekter Abschusswinkel $\Delta\alpha = 0$

$$|\Delta h(\Delta v)| = |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| \leq 0.04m$$

Kondition

$$\begin{aligned} |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| &\leq \kappa_{\mathrm{abs}}(H, v_0) \cdot |\Delta v| \\ \kappa_{\mathrm{abs}}(H, v_0) &= |\frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0)| \end{aligned}$$

Vereinfachung: Perfekter Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^o$

$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g\frac{x_0^2}{v^2}$$

Konditionsberechnung:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \left|\frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0)\right| = 2g\frac{x_0^2}{v_0^3} \\
v_0 &= \frac{|x_0|\sqrt{g}}{\sqrt{x_0 - h_0}} \\
\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{(x_0 - h_0)^{3/2}}{x_0} = 1.98\text{sec}
\end{aligned}$$

Absolute Kondition: Nebenrechnungen

Vereinfachung: Perfekter Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^o$

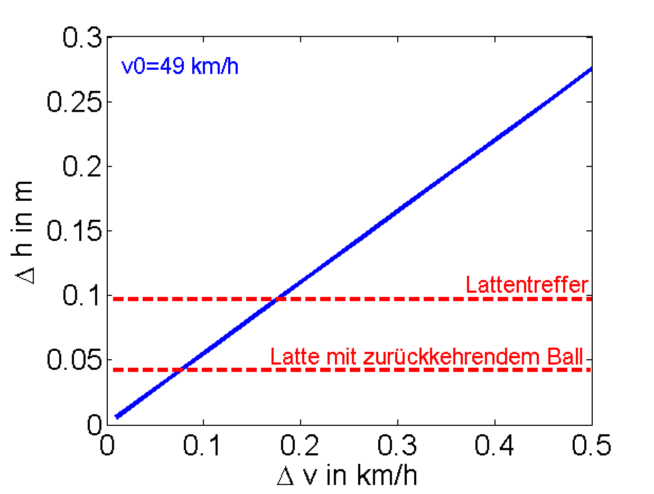
$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g\frac{x_0^2}{v^2}$$

Konditionsberechnung:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{(x_0 - h_0)^{3/2}}{x_0} = 1.98\text{sec} \\
\kappa_{\text{rel}}(H, v_0) &= \kappa_{\text{abs}}(H, v_0)\frac{v_0}{H(v_0, \alpha_0)} \\
\kappa_{\text{rel}}(H, v_0) &= 2\frac{|x_0 - h_0|}{h_0} = 10.8
\end{aligned}$$

Perfekter Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^o$

Fehler Δv in Abschussgeschwindigkeit



Ronaldinhos Kondition: Fehler in der Überflughöhe

Perfekter Abschusswinkel $\alpha_0 = 45^o$

Fehler Δv in Abschussgeschwindigkeit

Damit der Ball zu ihm zurückspringt müsste Ronaldinho die Abschussgeschwindigkeit auf

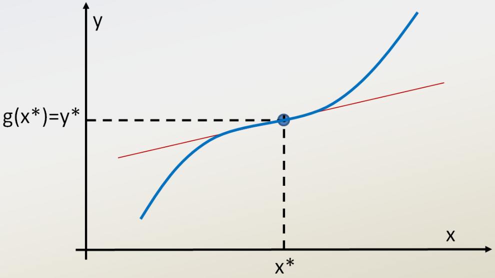
$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{0.05\, km/h}{49\, km/h} \approx 0.001,$$

also auf ein Promille genau treffen.

gegeben: Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\quad g : I \mapsto \mathbb{R}$, $\quad y^* \in \mathbb{R}$

Problem: $(*)$

$$\boxed{\text{Finde } x^* \in I \text{ so dass } g(x^*) = y^*}$$



Definition:
Die absolute Kondition κ_{abs} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|x^* - x| \le \kappa_{\text{abs}} |y^* - y| + o(|y^* - y|)$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y| > 0$ zu y^* und den zugehörigen Lösungen x des gestörten Problems

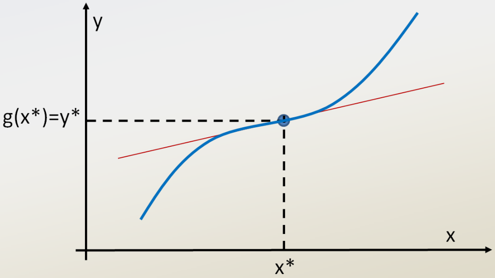
$$x \in (a, b): \qquad g(x) = y\ .$$

Existiert keine solche reelle Zahl κ_{abs}, so wird $\kappa_{\text{abs}} = \infty$ gesetzt.

Satz:
Sei g differenzierbar in I, $x^* \in I$ und es gelte $g(x^*) = y^*$ sowie

$$g'(x^*) \neq 0.$$

Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < x^* < \beta < b$, so daß das gestörte Problem $(*)$ für jedes $y \in V = [g(\alpha), g(\beta)]$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in U = [\alpha, \beta]$ besitzt.



Satz:
Sei g differenzierbar in I, $x^* \in I$ und es gelte $g(x^*) = y^*$ sowie

$$g'(x^*) \neq 0.$$

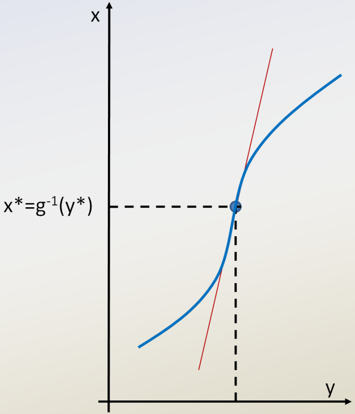
Dann gibt es α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < x^* < \beta < b$, so daß das gestörte Problem $(*)$ für jedes $y \in V = [g(\alpha), g(\beta)]$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in U = [\alpha, \beta]$ besitzt.

Folgerung:
Falls $g'(x^*) \neq 0$ existiert eine Umkehrfunktion $g^{-1} : V \to U$ so dass

$$g(g^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in V.$$

gegeben: Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\quad g : I \mapsto \mathbb{R}$, $\quad y^* \in \mathbb{R}$ mit $g'(x^*) \neq 0$

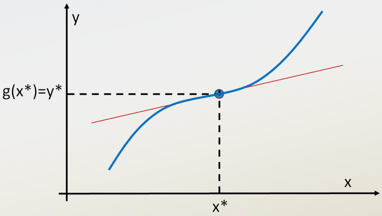
Problem: Auswertung von $g^{-1} : V \to \mathbb{R}$ in $y^* \in V$

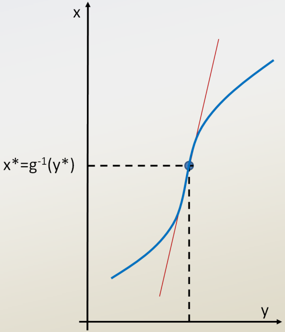


Unter den obigen Voraussetzungen ist g^{-1} differenzierbar und es gilt

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \quad \forall y \in V \ .$$

Denn, mit Kettenregel: $1 = \frac{d}{dy} y = \frac{d}{dy} g(g^{-1}(y)) = g'(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1})'(y)$





Sei g differenzierbar, $x^* \in (a, b)$, $g(x^*) = y^*$, sowie $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die absolute Kondition κ_{abs} der Lösung der nichtlinearen Gleichung bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\mathrm{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Sei g differenzierbar, $x^* \in (a, b)$, $g(x^*) = y^*$, sowie $g'(x^*) \neq 0$. Dann ist die absolute Kondition κ_{abs} der Lösung der nichtlinearen Gleichung bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\mathrm{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Die relative Kondition ergibt sich zu

$$\kappa_{\mathrm{rel}} = \frac{|y^*|}{|g^{-1}(y^*)|}\kappa_{\mathrm{abs}} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*||g'(x^*)|}.$$

Nebenrechnungen

Gegeben: $g(x) = \frac{1}{\gamma}(x-1)+1,\ y^* = 1$

Lösung: $x^* = 1, \quad g^{-1}(y) = 1+\gamma(y-1), \quad x^* = 1$

$$\kappa_{\mathrm{rel}} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*||g'(x^*)|} = \kappa_{\mathrm{abs}} = \gamma$$

Konsequenz: schlecht konditioniert für grosses γ
(=schleifender Schnitt)