

Inhaltsverzeichnis

Teil I Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht

1	Zahlen und Ziffern	3
1.1	Natürliche Zahlen	4
1.1.1	Rechnen und Ausrechnen	4
1.1.2	Ziffernsysteme	4
1.1.3	Positionssysteme	6
1.1.4	Dualdarstellung	8
1.1.5	Praktische Realisierung	9
1.2	Ganze Zahlen	10
1.2.1	Konstruktion von \mathbb{Z} durch Abschluß von \mathbb{N} unter Subtraktion	10
1.2.2	Zifferndarstellung	10
1.2.3	Speicherung im N -Bit-Zweierkomplement	11
1.2.4	Praktische Realisierung	12
1.3	Aufgaben	13
2	Aufwand und Komplexität	15
2.1	Sortieren ganzer Zahlen	15
2.2	Aufwand von Algorithmen und Komplexität von Problemen	18
2.3	Die Komplexität des Sortierproblems	20
2.4	Nichtpolynomielle Komplexität?	26
2.5	Aufgaben	27
3	Rationale Zahlen	29
3.1	Konstruktion von \mathbb{Q} durch Abschluß von \mathbb{Z} unter Division	29
3.2	Zifferndarstellung	30
3.3	Dezimal- und Dualbrüche	30
3.4	Praktische Realisierung	32
3.5	Aufgaben	33

4 Kürzen und Kryptographie	35
4.1 Kürzen von Brüchen	35
4.2 Kongruenzen und Restklassen	37
4.3 Der Euklidische Algorithmus	41
4.4 Komplexität und Kryptographie	46
4.5 Aufgaben	51
 Teil II Im Nebel der Unendlichkeit	
5 Reelle Zahlen	55
5.1 Konstruktion von \mathbb{R} durch Vervollständigung von \mathbb{Q}	55
5.2 Keine Zifferndarstellung reeller Zahlen	58
5.3 Gleitkommazahlen und Rundungsfehler	60
5.3.1 Absoluter und relativer Fehler	60
5.3.2 Fest- und Gleitkommazahlen	61
5.3.3 Bestapproximation durch Runden	62
5.3.4 Rundungsfehler und Maschinengenauigkeit	63
5.3.5 Gleitkommazahlen als Äquivalenzklassen reeller Zahlen ...	66
5.3.6 Gleichheitsabfragen	68
5.4 Praktische Realisierung	69
5.5 Aufgaben	71
6 Problem und Kondition	73
6.1 Kondition der Grundrechenarten	73
6.2 Kondition von Funktionsauswertungen	77
6.2.1 Absolute Kondition	77
6.2.2 Relative Kondition	81
6.3 Nullstellen quadratischer Polynome	82
6.4 Lösung nichtlinearer Gleichungen	85
6.5 Drei-Term-Rekursionen	90
6.6 Ronaldinhos Kondition	96
6.7 Aufgaben	99
7 Algorithmus und Stabilität	103
7.1 Gleitkommaarithmetik	103
7.1.1 Ein Polynom-Desaster	103
7.1.2 Keine algebraischen Umformungen in Gleitkommaarithmetik	104
7.1.3 Praktische Realisierung	106
7.2 Stabilität von Algorithmen	106
7.2.1 Definition und erste Eigenschaften	106
7.2.2 Stabilitätsabschätzungen und das Polynomdesaster	112
7.2.3 Auswertungsbäume	117
7.3 Summationsalgorithmen	122
7.3.1 Rekursive Summation	122
7.3.2 Hierarchische Summation	125
7.4 Varianzberechnung	128

7.5	Allgemeine Einsichten zur Rundungsfehlerabschätzung	135
7.6	Numerisches Differenzieren	136
7.7	Drei-Term-Rekursionen	142
7.7.1	Rekursive Auswertung	143
7.7.2	Der Algorithmus von Miller	150
7.8	Aufgaben	154
Teil III Linear Gleichungssysteme		
8	Normierte Räume	159
8.1	Vektor- und Matrixnormen	159
9	Lineare Gleichungssysteme	165
9.1	Kondition	165
9.2	Der Gaußsche Algorithmus	171
9.2.1	Motivation	171
9.2.2	Gaußscher Algorithmus und LR-Zerlegung	173
9.2.3	Die Stabilität des Gaußschen Algorithmus	179
9.2.4	Gaußscher Algorithmus mit Spaltenpivotsuche	183
9.3	Aufgaben	186
A	Grundbegriffe aus Analysis und Linearer Algebra	189
A.1	Relationen, Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen	189
A.2	Folgen	190
A.3	Stetigkeit	192
A.4	Supremum und Maximum	195
A.5	Differenzierbarkeit	196
A.6	Landau-Symbole	197
A.7	Vektoren	203
A.8	Matrizen	206
A.9	Lineare Rekursionen	211
	Literaturverzeichnis	215