

Programmieren in der Computerorientierten Mathematik I

Einführungsveranstaltung

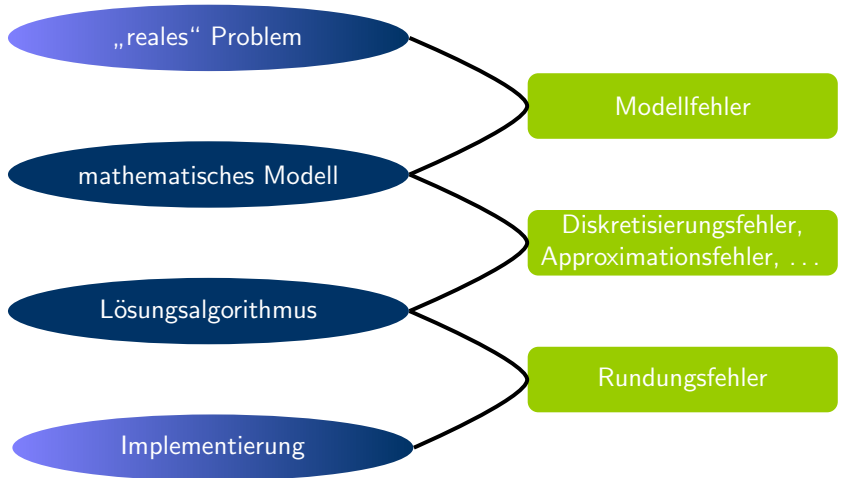
Freie Universität Berlin

Freie Universität  Berlin

20. Oktober 2017

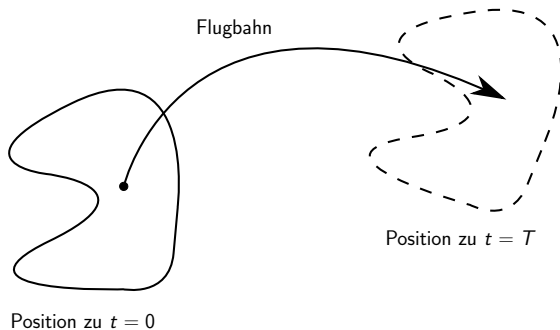
Tobias Kies

Angewandte Mathematiker und ihre Fehler



„reales“ Problem

Positionsbestimmung eines Flugobjekts zur Zeit T .



mathematisches Modell

Vereinfachende Annahmen: Objekt als Punkt, Position x_0 zu $t = 0$ bekannt, Geschwindigkeitsvektor $v(t)$ bekannt für $t \in [0, T]$.

mathematisches Modell

Vereinfachende Annahmen: Objekt als Punkt, Position x_0 zu $t = 0$ bekannt, Geschwindigkeitsvektor $v(t)$ bekannt für $t \in [0, T]$.

Fehler: Objekt ist kein Punkt, Messfehler in $x(0)$ und $v(t)$, ...

mathematisches Modell

Vereinfachende Annahmen: Objekt als Punkt, Position x_0 zu $t = 0$ bekannt, Geschwindigkeitsvektor $v(t)$ bekannt für $t \in [0, T]$.

Fehler: Objekt ist kein Punkt, Messfehler in $x(0)$ und $v(t)$, ...

Formel für Position zum Zeitpunkt T :

$$\begin{aligned}x(T) &= x_0 + \int_0^T v(t) dt \\ &= x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{n} \sum_{i=1}^n v\left(i \cdot \frac{T}{n}\right) \quad (\text{Def. Riemann-Integral})\end{aligned}$$

mathematisches Modell

Vereinfachende Annahmen: Objekt als Punkt, Position x_0 zu $t = 0$ bekannt, Geschwindigkeitsvektor $v(t)$ bekannt für $t \in [0, T]$.

Fehler: Objekt ist kein Punkt, Messfehler in $x(0)$ und $v(t)$, ...

Formel für Position zum Zeitpunkt T :

$$\begin{aligned}x(T) &= x_0 + \int_0^T v(t) dt \\ &= x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{n} \sum_{i=1}^n v\left(i \cdot \frac{T}{n}\right) \quad (\text{Def. Riemann-Integral})\end{aligned}$$

Wichtig: Wohldefiniertheit? („Ergibt dieser Ausdruck Sinn?“)

Zwischenschritt: Diskretisierung

Ziel: Approximiere die Lösung mit Hilfe endlich vieler „Elementaroperationen“.

Dafür zunächst: Das Problem **diskretisieren**, also „endlich machen“.

Zwischenschritt: Diskretisierung

Ziel: Approximiere die Lösung mit Hilfe endlich vieler „Elementaroperationen“.

Dafür zunächst: Das Problem **diskretisieren**, also „endlich machen“.

Approximation

$$x_N(T) := x_0 + \frac{T}{N} \sum_{i=1}^N v \left(i \cdot \frac{T}{N} \right)$$

Zwischenschritt: Diskretisierung

Ziel: Approximiere die Lösung mit Hilfe endlich vieler „Elementaroperationen“.

Dafür zunächst: Das Problem **diskretisieren**, also „endlich machen“.

Approximation

$$x_N(T) := x_0 + \frac{T}{N} \sum_{i=1}^N v \left(i \cdot \frac{T}{N} \right)$$

Diskretisierungsfehler

$$\|x(T) - x_N(T)\| \leq ?$$

Lösungsalgorithmus

Für unser Problem: Ein Lösungsalgorithmus ist eine **konkrete Aufeinanderfolge von Elementaroperationen**, mit denen $x_N(T)$ berechnet werden kann.

Lösungsalgorithmus

Für unser Problem: Ein Lösungsalgorithmus ist eine **konkrete Aufeinanderfolge von Elementaroperationen**, mit denen $x_N(T)$ berechnet werden kann.

Es gibt unendlich viele Lösungsalgorithmen!

Lösungsalgorithmus

Für unser Problem: Ein Lösungsalgorithmus ist eine **konkrete Aufeinanderfolge von Elementaroperationen**, mit denen $x_N(T)$ berechnet werden kann.

Es gibt unendlich viele Lösungsalgorithmen!

Häufig werden Algorithmen nur als **Pseudocode** angedeutet (oder durch eine konkrete Implementierung):

Lösungsalgorithmus

Für unser Problem: Ein Lösungsalgorithmus ist eine **konkrete Aufeinanderfolge von Elementaroperationen**, mit denen $x_N(T)$ berechnet werden kann.

Es gibt unendlich viele Lösungsalgorithmen!

Häufig werden Algorithmen nur als **Pseudocode** angedeutet (oder durch eine konkrete Implementierung):

- 1: Gegeben: $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $N \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $v(i\frac{T}{N}) \in \mathbb{R}^3$ für $i \in \{1, \dots, N\}$
- 2: Initialisiere $x_N(T) := x_0$, $h := \frac{T}{N}$
- 3: **for** $i = 1, \dots, N$ **do**
- 4: $x_N(T) \leftarrow x_N(T) + hv(ih)$
- 5: **end for**

Beispiel

Implementierung

Potentieller Nutzen

Implementierung

Potentieller Nutzen

Illustration bewiesener Ergebnisse

Implementierung

Potentieller Nutzen

Illustration bewiesener Ergebnisse

Simulationen in Zusammenarbeit mit anderen Wissenschaftlern

Implementierung

Potentieller Nutzen

Illustration bewiesener Ergebnisse

Simulationen in Zusammenarbeit mit anderen Wissenschaftlern

Leichtere Verfügbarkeit der Algorithmen für andere

Implementierung

Potentieller Nutzen

Illustration bewiesener Ergebnisse

Simulationen in Zusammenarbeit mit anderen Wissenschaftlern

Leichtere Verfügbarkeit der Algorithmen für andere

Impulse für die weitere Forschung

Implementierung

Potentieller Nutzen

Illustration bewiesener Ergebnisse

Simulationen in Zusammenarbeit mit anderen Wissenschaftlern

Leichtere Verfügbarkeit der Algorithmen für andere

Impulse für die weitere Forschung

Beispiel

```
1 function xN_T = computePosition( x0, v, T, N )
2   xN_T = x0;
3   h     = T/N;
4   for i = 1:N
5       xN_T = xN_T + h*v(i*h);
6   end
7 end
```

Angewandte Mathematik findet sich häufig an der Schnittstelle zu anderen Wissenschaften.

Physik, Chemie, Biologie, Informatik, Medizin,
Gesellschaftswissenschaften, . . .

Angewandte Mathematik findet sich häufig an der Schnittstelle zu anderen Wissenschaften.

Physik, Chemie, Biologie, Informatik, Medizin,
Gesellschaftswissenschaften, . . .

Programmieren ist ein ungemein wichtiger Bestandteil des Alltags angewandter Mathematiker. . .

Verifizierung von Resultaten, Inspiration für neue Resultate,
Teil interdisziplinärer Zusammenarbeit, . . .

Angewandte Mathematik findet sich häufig an der Schnittstelle zu anderen Wissenschaften.

Physik, Chemie, Biologie, Informatik, Medizin,
Gesellschaftswissenschaften, ...

Programmieren ist ein ungemein wichtiger Bestandteil des Alltags angewandter Mathematiker...

Verifizierung von Resultaten, Inspiration für neue Resultate,
Teil interdisziplinärer Zusammenarbeit, ...

... aber das Hauptaugenmerk liegt woanders.

Analyse mathematischer Modelle, Entwicklung und
Analyse von Algorithmen, ...

Beherrschung diverser Grundlagen des Programmierens.

Variablen, Funktionen, Kontrollstrukturen, . . .

Beherrschung diverser Grundlagen des Programmierens.

Variablen, Funktionen, Kontrollstrukturen, . . .

Fähigkeit, einfache mathematische Algorithmen zu implementieren.

Zahenumwandlung, euklidischer Algorithmus, gaußsches Eliminationsverfahren, . . .

Programmieren mit MATLAB

Wir verwenden für diesen Kurs MATLAB.

Wir verwenden für diesen Kurs MATLAB.

- ▶ Mathematisch angehauchte Syntax
- ▶ Einfach zu erlernende Sprache
- ▶ Einfach auszuführende Programme
- ▶ Schneller Zugriff auf zahlreiche mathematische Standardalgorithmen
- ▶ Ausführliche Dokumentation und große Community

Wir verwenden für diesen Kurs MATLAB.

- ▶ Mathematisch angehauchte Syntax
- ▶ Einfach zu erlernende Sprache
- ▶ Einfach auszuführende Programme
- ▶ Schneller Zugriff auf zahlreiche mathematische Standardalgorithmen
- ▶ Ausführliche Dokumentation und große Community
- Programmausführung oft langsamer als C/C++ (besonders bei ineffizienter Implementierung)
- Kostenpflichtig (Alternative fürs Zuhause: Octave)
- Kaum Objektorientierung
- Wenig Nähe zur Maschine

MATLAB ist geeignet für...

- ▶ Programmier-Einsteiger
- ▶ kleine bis mittelgroße wissenschaftliche Berechnungen
- ▶ Prototyping

MATLAB ist geeignet für...

- ▶ Programmier-Einsteiger
- ▶ kleine bis mittelgroße wissenschaftliche Berechnungen
- ▶ Prototyping

MATLAB ist nicht oder nur eingeschränkt geeignet für...

- sehr große, rechenintensive Probleme
- nicht-wissenschaftliche Anwendungen
- umfangreiche Projekte
- Open Source Projekte

MATLAB ist geeignet für...

- ▶ Programmier-Einsteiger
- ▶ kleine bis mittelgroße wissenschaftliche Berechnungen
- ▶ Prototyping

MATLAB ist nicht oder nur eingeschränkt geeignet für...

- sehr große, rechenintensive Probleme
- nicht-wissenschaftliche Anwendungen
- umfangreiche Projekte
- Open Source Projekte

⇒ Für das Ziel dieser Veranstaltung bietet MATLAB einen passenden Rahmen.

Nutzen über die Vorlesung hinaus

Einstieg in die Programmierung

Voraussetzung für diverse weiterführende Kurse

Relevanz in Wissenschaft und Industrie

Erleichterter Einstieg in andere Sprachen wie R, Python und Fortran

Kann für Schulprojekte in der Oberstufe verwendet werden?

Kann eine gemeinsame Plattform zwischen Mathematiker und Informatiker bieten

Kann als extrem mächtiger Taschenrechner den wissenschaftlichen Alltag erleichtern

Mit Hilfe der Vorlesung

Übungsaufgaben

Einführungsskript (sowie weitere Unterlagen später)

Programmiersprechstunde

regelmäßige Tutorien

MATLAB-Tutorien

Mit Hilfe der Vorlesung

Übungsaufgaben

Einführungsskript (sowie weitere Unterlagen später)

Programmiersprechstunde

regelmäßige Tutorien

MATLAB-Tutorien

Aus Eigenantrieb

Internet (besonders MathWorks und Stack Exchange)

Literatur

Fragen stellen!

Fragen?