Zentrale Begriffe (Vorlesung vom 20.10.2017)

Fehlerkonzept:

Modellfehler, Diskretisierungsfehler, *Rundungsfehler*.

Kondition eines Problems:

Kleine Ursache, große Wirkung (Orkan Lothar).

Stabilität eines Algorithmus

Komplexität eines Problems

Effizienz eines Algorithmus

Die natürlichen Zahlen (anschaulich)

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

- kennt jedes Kind
- beginnen mit 0 oder 1
- gut geeignet zum Abzählen
- keine Schulden, keine Tortenstücke
- ...

Die natürlichen Zahlen (axiomatisch)

Definition: $\mathbb{N}$ ist die Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- Es gibt ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{N}$.

- Es gibt eine Abbildung $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

(S1) S ist injektiv (d.h. $S(n) \neq S(m)$ falls $n \neq m$)

(S2) $0 \notin S(\mathbb{N}) = \{S(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

(S3) Ist $M \subset \mathbb{N}$ und gilt $0 \in M$ und $S(M) \subset M$ so gilt $M = \mathbb{N}$.

Anschaulich:
Jede natürlichen Zahl n hat genau einen Nachfolger $S(n)$.

Rechnen mit natürlichen Zahlen

Definition der Addition:

(A1) $n + 0 = n$ (A1) n+S(m)=S(n+m)

Nachweis der Rechenregeln:

Assoziativität: $k + (n + m) = (k + n) + m$
Kommutativität: $n + m = m + n$

Folgerung: Wir können mit natürlichen Zahlen rechnen.

Aber: Bevor wir die Summe zweier natürlicher Zahlen ausrechnen können muss jede natürliche Zahl genau einen Namen haben!

Ziffernketten

Problem:

unendlich viele natürliche Zahlen $\Leftrightarrow$ unendlich viele Namen

Lösung:

Ziffernketten: $z_1 z_2 z_3 \ldots z_k, \qquad z_i \in \mathcal{Z}, \quad i = 1, \ldots, k$

endliche Ziffernmenge $\mathcal{Z}$

Interpretation:

- Systematische Konstruktion unterschiedlicher Symbole
- Bilden von Worten aus einem Alphabet

Ziffernsysteme

Satz: Sei $\mathcal{Z}$ eine endliche Ziffernmenge und

$$\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{z_1 z_2 \dots z_k \mid k \in \mathbb{N},\ z_i \in \mathcal{Z},\ i = 1, \dots, k\}$$

die Menge aller Ziffernketten.
Dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(\mathcal{Z})$.

Definition: Die Ziffernmenge $\mathcal{Z}$ und die Zuordnung φ erzeugen ein Ziffernsystem zur Darstellung von $\mathbb{N}$.

Definition: Eine Menge M, für die ein bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$ existiert, heißt abzählbar.

Beispiele für Ziffernsysteme

römische Zahlen: $\mathcal{Z} = \{I, V, X, L, C, D, M\}$

kein Ziffernsystem!

Unärsystem:

nur eine Ziffer: $\mathcal{Z} = \{|\}$

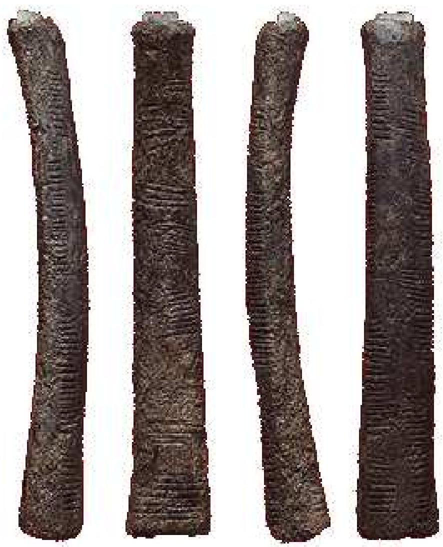
Ziffernketten: $\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{|, ||, |||, \ldots\}$

Zuordnung: $\varphi(0) = \ , \quad \varphi(1) = |, \quad \varphi(n+1) = \varphi(n)|$

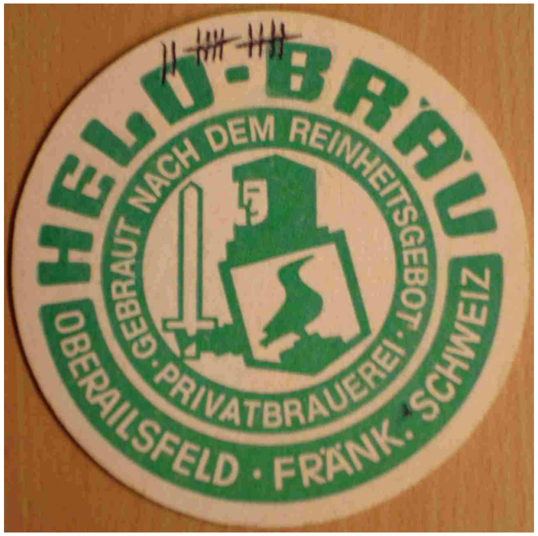
Beispiel: $\varphi(4) = ||||$

Praktische Anwendungen

...vor 15000-20000 Jahren im Kongo:



...heute:



Potenzzerlegung zur Basis q

Satz: Sei $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ fest gewählt.
Dann lässt sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Potenzzerlegung

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i q^i,$$

darstellen.
Dabei sind die Koeffizienten $r_i \in \{0, \ldots, q-1\} \subset \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt.

Positionssystem zur Basis q

Definition:

Ziffernmenge: $\mathcal{Z} = \{z_0, z_1, ..., z_{q-1}\}$

Zuordnung:

$$n \mapsto \varphi(n) = z_n, \qquad n = 0, \dots, q-1,$$

und im Falle $n > q-1$

$$n \mapsto \varphi(n) = z_{r_k} z_{r_{k-1}} \dots z_{r_0} \quad \text{mit} \quad n = \sum_{i=0}^{k} r_i q^i, \quad 0 \le r_i \le q-1$$

Diese Zifferndarstellung heißt q-adische Darstellung.

Beispiele

Dezimalsystem: $\mathcal{Z} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

q-adische Systeme mit $q \leq 36$: Erweiterung um $\{A, B, C \dots, Z\}$

Konventionen:

- keine Unterscheidung zwischen Darstellung und Zahl:

$$z_k z_{k-1} \dots z_{0_q} = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

- kein Index q, falls $q = 10$
- den Index i von z_i nennt man Stelle, $z_k z_{k-1} \dots z_{0_q}$ eine k-stellige Zahl

Positionssystem zur Basis $q = 2$: Dualsystem

Ziffernmenge $\mathscr{Z} = \{0, 1\}$

Ideal für die technische Umsetzung:

1 Binärstelle $\Leftrightarrow$ 1 Bit

Alle modernen Rechenmaschinen arbeiten mit dem Dualsystem.

Zahlenbereich: Im Dualsystem lassen sich mit N Stellen alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq n \leq 2^N - 1$$

darstellen.

Historische Rechenmaschinen I

- Abakus
- mechanische Zählräder
- 1623 Wilhelm Schickard, 1642 Blaise Pascal, 1673 Gottfried Wilhelm von Leibniz: Rechenmaschinen mit dekadischem System
- 1679 Leibniz: Dualsystem
- 1935 - 1938 Konrad Zuse (Berlin):
  erster frei programmierbarer Rechner Z1 (mechanisch)

Rechenmaschinen II

- 1941 Konrad Zuse: elektromechanisch (Relais): Z3
- 1944 Cambridge: rein elektronisch (Elektronenröhren): COLOSSOS
- 1947 John Bardeen, Walter Brattain, William Shockley: Transistor
- 1971 Mikroprozessor: Intel
- 2000 Pentium 4: 42 Millionen Transistoren auf 217 mm^2
- 2007 Dual-Core Itanium 2: 1200 Millionen Transistoren auf 596 mm^2
- ...

Technische Realisierung

- kleinste Einheit (0 oder 1): Bit
- Bits werden in festen Längen zusammengefaßt.
- 8 Bits $= 1$ Byte mit $2^8 = 256$ verschiedene Zuständen
- feste Anzahl Bytes für Zahlendarstellung
- üblich: $1, 2, 4, 8$ Bytes bzw. $8, 16, 32, 64$ Bits
- Bezeichnungen: BYTE, WORD, DWORD, QWORD (nicht einheitlich)
- Bereich von 64-Bit Zahlen:

$$0 \leq z \leq 2^{64} - 1 > 18 \cdot 10^{18} = 18 \text{ Trillionen}$$

Die ganzen Zahlen (anschaulich)

$$\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$$

- kennt (fast) jedes Kind
- beginnen nirgends
- es gibt positive und negative Zahlen
- Schulden, aber keine Tortenstücke

Die ganzen Zahlen (konstruktiv)

Problem:

Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$

Ausweg:

Erweitere $\mathbb{N}$ zu $x = (m, n)$ (wir schreiben m-n)

Neues Problem:

nicht eindeutig: $x+2 = 1$ und $x+1 = 0$ hätten verschiedene Lösungen

Neuer Ausweg:

Äquivalenzklassen (siehe Skript, Analysis I, Lineare Algebra I, ...)

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Ja! Denn $-1 \in \mathbb{Z}$, aber $-1 \notin \mathbb{N}$.

Nein! Denn $\mathbb{Z}$ ist abzählbar (es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$).

Vorsicht mit unendlichen Mengen!

Zifferndarstellung: Vorzeichenbit

Darstellung der positiven Zahlen:

$$z_k z_{k-1} \dots z_{0_q} = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

zusätzliches Symbol: „$-$“

Darstellung der negativen Zahlen:

$$-z_k z_{k-1} \dots z_{0_q} = -\sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

technische Realisierung: Vorzeichenbit

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Vorzeichenbit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, 111_2, 110_2, 11_2, 00_2, 01_2, 010_2, 011_2, \ldots\}$$

Eindeutigkeit bei endlich vielen Stellen: 1. Stelle: Vorzeichenbit

Nachteile:

- Keine eindeutig bestimmte Darstellung der Null: $0 = 00_2 = 10_2$
- Addition natürlicher und ganzer Zahlen grundsätzlich verschieden

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Zweierkomplement

Kochrezept: Das Zweierkomplement von $n < 0$ erhält man durch

Dualdarstellung, Umklappen und 1 addieren

Beispiel: $N = 4$ Bits vorhanden und $n = -3$

$$\underbrace{-3}_{\text{Dezimalzahl}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{-0011}_{\text{Dualdarstellung}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{-1100}_{\text{umklappen}} \rightarrow \quad \underbrace{1101}_{\text{Zweierkomplement}}$$

Einfaches Rechnen mit dem Zweierkomplement

Grundsätzlich keine Subtraktion nötig: a-b=a+(-b)

Addition direkt auf negative Zahlen im Zweierkomplement erweiterbar:

Beispiel: $3 - 3 = 3 + (-3)$ im 4-Bit-Zweierkomplement lautet:

$$\begin{array}{r|c|}
\cline{2-2}
 & 0 \mid 0\,1\,1 \\
\cline{2-2}
+ & 1 \mid 1\,0\,1 \\
\hline
 & 0 \mid 0\,0\,0 \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

Was steckt dahinter?

komplementäre Potenzzerlegung:

$$\boxed{1 \mid z_{N-2} \quad \cdots \quad z_0} \;\hat{=}\; -\left(1 + \sum_{i=0}^{N-2} (1 - z_i)\, 2^i\right)$$

eindeutig bestimmte Darstellung der Null: $0 = 0000_2$

asymmetrischer Zahlenbereich:

$$z_{\text{min}} \leq -2^{N-1} \leq z \leq 2^{N-1} - 1 = z_{\text{max}}$$

Nicht verwechseln mit Overflow ...

Beispiel: $N = 3$

-1	1 1 1
-2	1 1 0
-3	1 0 1
-4	1 0 0
3	0 1 1
2	0 1 0
1	0 0 1
0	0 0 0

Overflow-Desaster:

Ariane 5 (4. Juni 1996)

Andere Möglichkeiten...

Asymmetrie des Zweierkomplements:

$$1000,\ 1001,\ \ldots,\ 1101,\ 1110,\ 1111,\ 0000,\ 0001,\ 0010,\ 0011, \ldots,\ 0111$$

exotische Alternative: $q = 3,\ z_0 = \underline{1},\ z_1 = 0,\ z_2 = 1$

symmetrisch:

$$\underline{1111},\ \ldots,\ 00\underline{1}0,\ 00\underline{1}1,\ 000\underline{1},\ 0000,\ 0001,\ 0011, 0010, \ldots, 1111$$

technische Realisierung: Sowjetunion (S.L. Sobolev, 1958)