

# Vektor- und Matrixnormen Vorlesung vom 12.1.18

## Grundlagen:

Matrix-Vektor- und Matrixprodukt. Lineare Räume. Beispiele.

## Problem:

Berechne die Lösung  $x$  von  $Ax = b$  zu gegebenem  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Ziele: Konditionsanalyse dieses Problems, Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus.

## Normen auf linearen Räumen:

Motivation: Erweiterung des Betrags von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^{n,n}$ .

Definition: Axiomatisierung des Längenbegriffs. Beispiele:  $\|\cdot\|_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , auf  $\mathbb{R}^n$ .

Zu einer gegebenen Vektornorm  $\|\cdot\|$  gehörige Matrixnorm:

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Beispiel: Zur Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  gehört die Zeilensummen-Norm.

# Normen

**Definition 8.1** Es sei  $V$  ein linearer Raum über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **Norm**, falls für alle  $x, y \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad (1)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\text{Homogenität}), \quad (2)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}). \quad (3)$$

Das Paar  $(V, \| \cdot \|)$  heißt **normierter Raum**.

## Beispiele: Vektornormen

$$x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$$

Euklidische Norm:

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

$p$ -Norm:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Maximumsnorm ( $\infty$ -Norm):  $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$

## Matrixnormen

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in V = \mathbb{R}^{n,n}$  , Matrizen mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten

jede Vektornorm auf  $\mathbb{R}^{n^2}$  induziert eine Matrixnorm auf  $\mathbb{R}^{n,n}$   
(interpretiere  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  als Vektor im  $\mathbb{R}^{n^2}$ )

Verträglichkeit der Matrixnorm  $\|\cdot\|_M$  mit Matrix–Vektor–Multiplikation:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$$

$\|A\|_M$  ist eine obere Schranke für die Längenänderung.

## Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

**Definition 8.8** Es sei  $\|\cdot\|$  eine Vektornorm auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n},$$

die **zugehörige Matrixnorm**  $\|\cdot\|_M$  definiert.

**Bemerkung:** Für zugehörige Matrixnormen gilt

- $\|\cdot\|_M$  ist eine Norm.
- $\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$
- $\|AB\|_M \leq \|A\|_M \|B\|_M \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n},$  (Submultiplikativität)
- Die Norm der Einheitsmatrix  $I$  ist  $\|I\|_M = 1$ .

## Die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm

**Satz 8.10** (Zeilensummennorm) Die Matrixnorm

$$\|A\|_{\infty} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n},$$

gehört zur Maximumsnorm  $\|\cdot\|_{\infty}$  auf  $\mathbb{R}^n$ .

### Bemerkung:

Es sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Vektornorm und  $\|\cdot\|_M$  die zugehörige Matrixnorm. Dann existiert ein  $x^* \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x^*\| = 1$  und  $\|Ax^*\| = \|A\|_M$ .

## Konvergenz in normierten Räumen

**Definition 8.4** Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $(x^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset V$  eine Folge. Die Folge heißt **konvergent** gegen  $x \in V$ , also

$$x^{(\nu)} \rightarrow x, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

falls

$$\|x - x^{(\nu)}\| \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty.$$

**Beispiel:**  $V = \mathbb{R}^n$ , Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$

$$(x^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \iff x_i^{(\nu)} \rightarrow x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

## Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

**Satz 8.5** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler linearer Raum und  $\|\cdot\|$  und  $|||\cdot|||$  Normen auf  $V$ . Dann existieren  $c, C \in \mathbb{R}$ , so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \quad \forall x \in V .$$

Beweis:

Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

**Folgerungen:**  $V = \mathbb{R}^n$  mit beliebiger Norm  $\|\cdot\|$  und  $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\infty$

$$x^{(\nu)} \rightarrow x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_i^{(\nu)} \rightarrow x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{C \|Ax\|_\infty}{c \|x\|_\infty} = \frac{C}{c} \|A\|_\infty < \infty$$



# Lineare Gleichungssysteme

$n = 3$  lineare Gleichungen für  $n = 3$  Unbekannte:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \quad x = b$

# Kondition

Problem:

Berechne  $x \in \mathbb{R}^n$  aus  $Ax = b$  zu gegebenen Daten  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern  $\tilde{A} \approx A$ ,  $\tilde{b} \approx b$  auf das Ergebnis  $\tilde{x}$

## Existenz und Eindeutigkeit

**Satz 9.1** Die Koeffizientenmatrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  heißt **regulär**, falls

$$x \neq 0 \implies Ax \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

andernfalls **singulär**.

Ist  $A$  regulär, so existiert eine eindeutig bestimmte **Inverse**  $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$  von  $A$  mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

und das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

hat für jede rechte Seite  $b \in \mathbb{R}^n$  eine **eindeutig bestimmte Lösung**  $x = A^{-1}b$ .

# Kondition

Problem:

Berechne  $x \in \mathbb{R}^n$  aus  $Ax = b$  zu gegebenen Daten  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$

äquivalentes Problem:

Auswertung von  $x = f(A, b) = A^{-1}b \in \mathbb{R}^n$  für  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$

Lösungsoperator:  $f(A, b) = A^{-1}b$  nicht explizit gegeben

Auswirkung von Eingabefehlern  $\tilde{A} \approx A$ ,  $\tilde{b} \approx b$  auf das Ergebnis  $\tilde{x}$

# Fehlermaß

normweiser absoluter Fehler:

$$\|x - \tilde{x}\|, \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:

$$x = (0.5, 123)^T, \quad \tilde{x} = (1, 100)^T, \quad \|x - \tilde{x}\|_\infty = \max\{0.5, 23\} = 23$$

normweiser relativer Fehler:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}, \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0$$

Beispiel:

$$x = (0.5, 123)^T, \quad \tilde{x} = (1, 100)^T, \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\max\{0.5, 23\}}{123} \approx 0.186$$

## Die Kondition einer Matrix

**Definition 9.2** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Ist  $A$  eine reguläre Matrix, so heißt

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

**Kondition von  $A$ .** Ist  $A$  singulär, so wird  $\kappa(A) = \infty$  gesetzt.

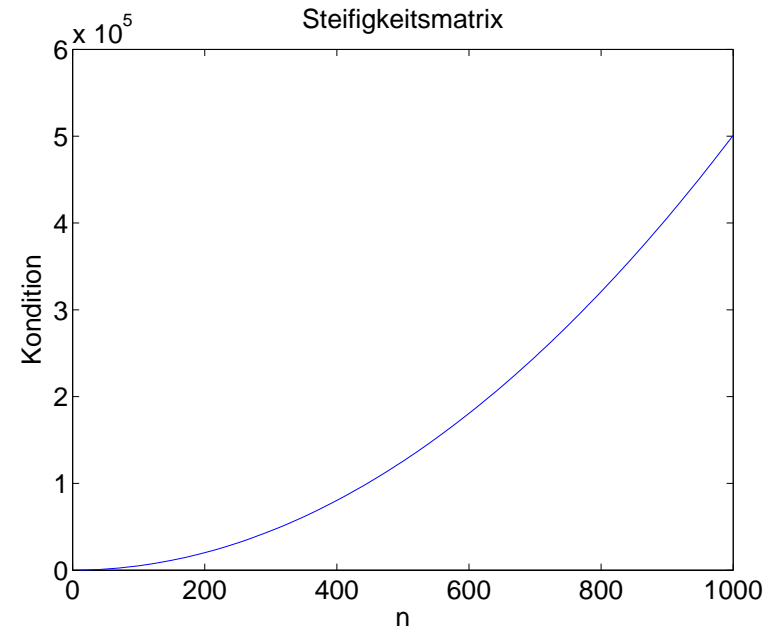
**Bemerkung:** Es gilt

- $\kappa(A) \geq 1$  und  $\kappa(I) = 1$
- $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$

## Beispiel: Differenzenverfahren für ein Randwertproblem

$$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad h = 1/(n+1)$$

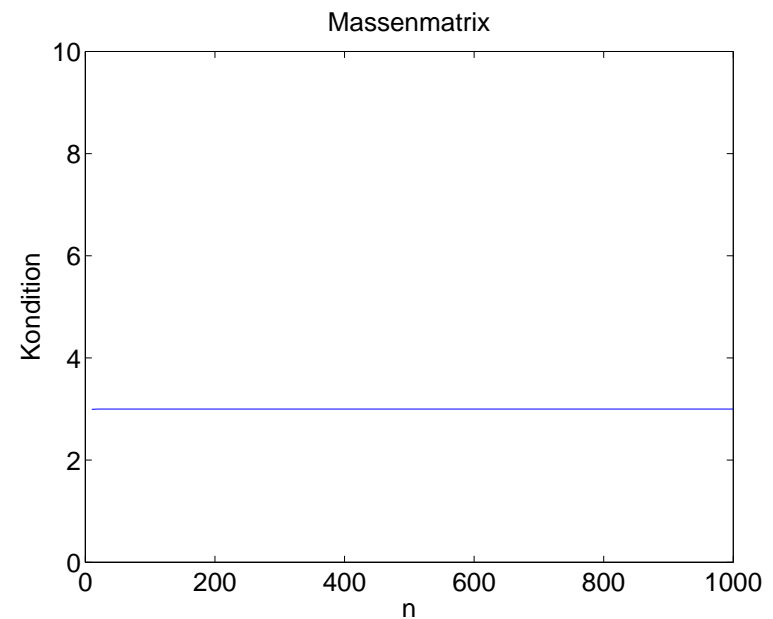
$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$



Kondition:  $\kappa_\infty(A_n) = \|A_n\|_\infty \|A_n^{-1}\|_\infty$

## Beispiel: Massenmatrix (Bestapproximation)

$$M_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$



Kondition:  $\kappa_\infty(M_n) = \|M_n\|_\infty \|M_n^{-1}\|_\infty$



## Auswirkungen von Störungen der rechten Seite $b$

**Lösungsoperator:**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch  $x = f(b) = A^{-1}b$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$

**Definition:** Die **relative Kondition**  $\kappa_{\text{rel},b}$  der Auswertung des Lösungsoperators  $f$  an der Stelle  $b$  ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|f(b) - f(\tilde{b})\|}{\|f(b)\|} \leq \kappa_{\text{rel},b} \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} + o(\|b - \tilde{b}\|).$$

Ist dies für keine reelle Zahl  $\kappa_{\text{rel},b}$  richtig, so wird  $\kappa_{\text{rel},b} = \infty$  gesetzt.

## Auswirkungen von Störungen der rechten Seite $b$

**Satz 9.4** Sei  $x$  die Lösung von  $Ax = b$ ,  $b \neq 0$ , und  $\tilde{x}$  die Lösung des gestörten Systems

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit beliebigem  $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

Es existieren rechte Seiten  $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ , so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

**Folgerung:**  $\kappa_{\text{rel},b} = \kappa(A)$

## Numerisches Beispiel: Störung von $b$

exaktes System:  $Ax = b$   $\kappa_{\infty}(A) \approx 2.5 \cdot 10^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

auf 3 Stellen gerundete rechte Seite:  $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 11.2 \\ 10.6 \\ 8.17 \end{pmatrix}$$

## Störungen der Koeffizientenmatrix $A$

gestörtes System:  $\tilde{A}\tilde{x} = b$ ,  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$

Existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $\tilde{x}$  ?

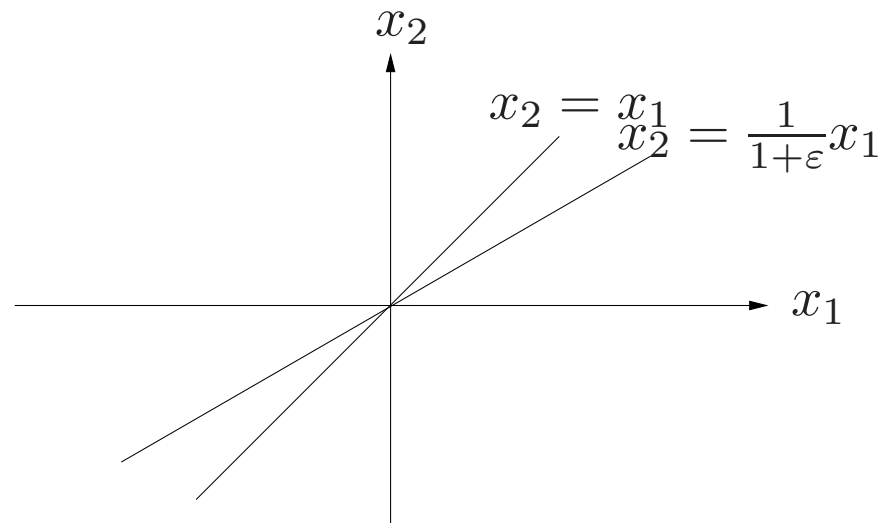
Beispiel (schleifender Schnitt):

reguläre Matrix  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

Runden im Falle  $\varepsilon < eps$ :

$$\tilde{A} = \text{rd}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{singulär!}$$



## Kleine Störungen erhalten die Regularität

**Lemma 9.5** Es sei  $C \in \mathbb{R}^{n,n}$  und  $\|C\| < 1$ .  
Dann ist  $I - C$  regulär, und es gilt

$$(I - C)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} C^k \quad (\text{Neumannsche Reihe}).$$

Folgerung:

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)} \iff \|A - \tilde{A}\| \|A^{-1}\| < 1$$
$$\implies \tilde{A} \text{ regulär!}$$

## Auswirkungen von Störungen der Koeffizientenmatrix $A$

**Satz 9.6** Sei  $x$  die Lösung von  $Ax = b$ ,  $b \neq 0$ , und  $\tilde{x}$  die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

mit  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  und  $\|A - \tilde{A}\| \|A^{-1}\| < 1$ . Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + o(\|A - \tilde{A}\|).$$

Es existieren Koeffizientenmatrizen  $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ , so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Skript

## Numerisches Beispiel: Störung von $A$

exaktes System:  $Ax = b$   $\kappa_{\infty}(A) \approx 2.5 \cdot 10^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundete Koeffizientenmatrix:  $\tilde{A}\tilde{x} = b$ ,  $\|A^{-1}\|_{\infty}\|A - \tilde{A}\|_{\infty} = 0.3672$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 9.2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

## Auswirkungen von Störungen von $A$ und $b$

**Satz 9.7** Sei  $x$  die Lösung von  $Ax = b$ ,  $b \neq 0$ , und  $\tilde{x}$  die Lösung des gestörten Systems

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

mit  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  und  $\|A - \tilde{A}\| < \|A^{-1}\|^{-1}$  sowie  $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left( \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right) + o(\|A - \tilde{A}\| + \|b - \tilde{b}\|).$$

Es existieren rechte Seiten  $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$  und Koeffizientenmatrizen  $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ , so daß in dieser Abschätzung Gleichheit vorliegt.

Beweis: Übung



## Numerisches Beispiel: Störung von $A$ und $b$

exaktes System:  $Ax = b$   $\kappa_{\infty}(A) \approx 2.5 \cdot 10^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -99.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -2999 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gerundetes System:  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -300 & -100 \\ -300 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -3990 \\ -1000 \\ -3000 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$