Stabilitätsanalyse des Gaußsche Algorithmus' Vorlesung vom 26.1.18

Auswirkung von Auswertungsfehlern:

Beispiel und Definition der Stabilität.

Stabilitätsanalyse in drei verschiedenen Auflösungen. Einfachster Fall:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 2\kappa(R)eps + o(eps)$$

$$\kappa(R) = \kappa\left(\prod_{k=1}^{n-1}(I - G_{n-k})A\right) \leq \kappa(A)\prod_{k=1}^{n-1}\kappa(I - G_k)$$

Fazit: Konditionsverschlechterung durch Elimination.

Extrembeispiel: Wilkinsonmatrix.

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche:

Algorithmische Konsequenzen: Pivotsuche.

Abschätzung der Stabilität: $\kappa(R) \leq 4^{n-1}\kappa(A)$.

LR-Zerlegung einer permutierten Matrix.

Organisatorisches zur Klausur am 9.2.2018

Verbindliche Verteilung: Anfangsbuchstaben des Nachnamens

A-K : Henry-Ford-Bau, Hörsaal B
L-Z : Henry-Ford-Bau, Hörsaal D

Beginn: 12:15 Uhr, Ende: 13:45 Uhr (90 Minuten), Ausweis mitbringen!

Erlaubt: selbst mitgebrachte schriftliche Unterlagen und Bücher.

Verboten: jegliche elektronischen Hilfs- und Kommunikationsmittel (Taschenrechner, Mobiltelefon, Laptop, ...), Täuschungsversuche

Zentrale Begriffe

Vorlesung vom 20.10.2017

Kondition eines Problems:

Kleine Ursache, große Wirkung (Orkan Lothar, Moleküldynamik).

Stabilität eines Algorithmus:

Keine Äquivalenz vom Multiplikation und mehrfacher Addition.

Komplexität eines Problems

Effizienz eines Algorithmus

Darstellung natürlicher und ganzer Zahlen **Vorlesung vom 27.10.2017**

Ziffernsysteme:

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen.
Ziffernsysteme: Definition und Beispiele.
Satz: Die Menge aller Ziffernketten $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.
Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Positionssysteme:

Definition und Beispiele.
Dezimal- und Dualdarstellung natürlicher Zahlen.
Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Ganze Zahlen:

Erweiterung der Zifferndarstellung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$.
Dualdarstellung mit Vorzeichenbit.
Darstellung negativer ganzer Zahlen im Rechner: Zweierkomplement.

Darstellung rationaler und reeller Zahlen

Vorlesung vom 3.11.17

Rationale Zahlen:

Rationale Zahlen als Brüche ganzer Zahlen.

q-adische Brüche, periodische q-adische Brüche. Beispiele.

Satz: Jede rationale Zahl ist als periodischer q-adischer Bruch darstellbar.

Eindeutigkeit durch $0,\overline{9}$ statt 1.

Praktische Realisierung: Dynamische Ziffernzahl. Aufwand pro Addition problemabhängig. (Hauptnenner, Kürzen).

Reelle Zahlen:

Reelle Zahlen als unendliche q-adische Brüche.

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar. Folgerung: Es gibt keine Zifferndarstellung von $\mathbb{R}$.

Konsequenz: Numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht möglich!

Festkommazahlen:

Absoluter und relativer Fehler. Beispiele.

Definition von Festkommazahlen und Gleitkommazahlen. Beispiele.

Typische Aufgabe

Formen Sie den periodischen Dualbruch $0,\overline{10}_2$ in einen Dualbruch um, d. h. bestimmen Sie zwei ganze Zahlen a; b in Dualdarstellung, so dass gilt

$$0,\overline{10}_2 = \frac{a}{b}.$$

Rundungsfehler und Gleitkommaarithmetik

Vorlesung vom 10.11.17

Runden und Rundungsfehler:

Der absolute Rundungsfehler ist nicht gleichmäßig beschränkt.

Der relative Rundungsfehler ist gleichmäßig beschränkt.

Obere Schranke: Maschinengenauigkeit $eps = eps(q, \ell)$.

Praktische Realisierung von Gleitkommazahlen:

Endlicher Exponentenbereich bewirkt endlichen Zahlenvorrat. Datentypen: `double`, `float`.

Zahlenmengen statt Zahlen:

Menge aller Gleitkomma-Approximationen von $x \in \mathbb{R}$ mit relativem Fehler $eps(q, \ell)$.

Menge aller reellen Zahlen, die auf $\tilde{x} \in \mathbb{G}(q, \ell)$ gerundet werden.

Folgerung: Gleichheitsabfragen von Gleitkommazahlen verboten.

Algebraische Eigenschaften:

Gleitkommaarithmetik, Verlust von Assoziativität, Distributivität, Invertierbarkeit.

Folgerung: Übliche Umformungen sind nicht mehr äquivalent.

Kondition
Vorlesung vom 17.11.17

Relative Kondition der Grundrechenarten:
Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate.
Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung).
Deshalb: Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:
Die absolute Kondition κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}}|x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \ .$$

Sätze zur absoluten Kondition:
Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)|$.
Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq L$.
Für geschachtelte Funktionen $f(x) = g(h(x))$ gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq \kappa_{\text{abs}}(g, y_0)\ \kappa_{\text{abs}}(h, x_0)$.

Kondition: Anwendungen

Vorlesung vom 24.11.17

Kondition nichtlinearer Gleichungen:

Problem: Finde x^*, so dass $g(x^*) = y^*$

Definition der absolute Kondition κ_{abs}:
Auswirkung von Fehlern in der rechten Seite y^* auf die Lösung

Satz:
Hinreichende Bedingungen für die Existenz von g^{-1} in einer Umgebung von y^*.

Äquivalentes Problem: Auswertung der Umkehrfunktion g^{-1} an der Stelle y^*

Satz: $\kappa_{\mathrm{abs}} = |(g^{-1})'(y^*)| = |g'(x^*)|^{-1}$

Definition und Berechnung der relativen Kondition: klar!

Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Ronaldinhos Kondition

Typische Aufgabe

Für eine gegebene reelle Zahl $b > 0$ soll die positive Nullstelle $x_0 = f(b)$ der Funktion

$$P(x) = x^2 + 2x - b$$

berechnet werden.

a) Berechnen Sie die relative Kondition dieses Problems.

Stabilitätsanalyse

Vorlesung vom 1.12.17

Stabilität:

Motivation des Stabilitäts- und Algorithmusbegriffs. Abgrenzung zur Kondition.
Relative Stabilität von Algorithmen zur Funktionsauswertung.
Definition und Beispiele.

Gesamtfehlerabschätzungen:

Satz 7.5: Der Gesamtfehler lässt sich abschätzen durch die Summe von
Eingabefehler, verstärkt durch die Kondition, und
Auswertungsfehler, verstärkt durch die Stabilität.

Stabilitätsabschätzungen:

Kondition der Elementarfunktionen und Stabilität:
Grundrechenarten (Satz 7.9) und Elementarfunktionen (Satz 7.8). Beispiele.
Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!
Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!
Das Polynom-Desaster in MATLAB: Grobe Stabilitätsanalyse.

Stabilitätsabschätzungen

Vorlesung vom 8.12.17

Auswertungsbäume zur systematischen Stabilitätsabschätzung

Auswertungsbaum: Knoten, gerichtete Kanten, Wurzel, Blätter
Zerlegung in Teilbäume
Von den Blättern zur Wurzel:
rekursive Funktionsauswertung und Stabilitätsabschätzung
Theoretische Grundlage: Satz 7.6 und Satz 7.9
Beispiele.

Summationsalgorithmen

Rekursive Summation, Auswertungsbaum, Stabilitätsanalyse
Hierarchische Summation.

Typische Aufgabe

Für eine gegebene reelle Zahl $b > 0$ soll die positive Nullstelle $x_0 = f(b)$ der Funktion

$$P(x) = x^2 + 2x - b$$

berechnet werden.

a) Berechnen Sie die relative Kondition dieses Problems.

b) Berechnen Sie eine obere Schranke für die Stabilität des Algorithmus'

$$f(b) = \frac{b}{g_1 \circ g_2 \circ g_1(b)}, \qquad g_1(y) = 1 + y, \quad g_2(y) = \sqrt{y}$$

Aufwand und Komplexität

Vorlesung vom 15.12.17

Komplexität und Effizienz

Aufwand: Anzahl dominanter Operationen (worst-case). Beispiel.
Landau-Symbol $O(n)$. Beispiel.

Definition: Aufwand eines Algorithmus. Komplexität eines Problems.

Summation

Aufwand: rekursive und hierarchische Summation. Komplexität.

Sortieren

Aufwand: TumbSort, BubbleSort und MergeSort. Komplexität.

Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von $\mathbf{a \geq b}$:

Naiver Algorithmus (Ausprobieren): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen.
Variante (Ausprobieren rückwärts): Aufwand: $\mathcal{O}(b)$ Divisionen (worst-case!).

Strukturelle Einsicht: Kongruenzen (Gauß 1801), Rekursionssatz.
Euklidischer Agorithmus: Aufwand: $\mathcal{O}(\log(b))$ Divisionen.

Vektor– und Matrixnormen

Vorlesung vom 22.12.17

Grundlagen:
Matrix–Vektor– und Matrixprodukt. Lineare Räume. Beispiele.

Problem:
Berechne die Lösung x von $Ax = b$ zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
Ziele: Konditionsanalyse dieses Problems, Stabilitätsanalyse des Gaußschen Algorithmus.

Normen auf linearen Räumen:
Motivation: Erweiterung des Betrags von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n,n}$.
Definition: Axiomatisierung des Längenbegriffs. Beispiele: $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, auf $\mathbb{R}^n$.
Zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$ gehörige Matrixnorm:

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,, \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n}\,.$$

Beispiel: Zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gehört die Zeilensummenorm.

Typische Aufgabe

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\|B - \mathrm{rd}(B)\|_\infty}{\|B\|_\infty} \le eps, \qquad \frac{\|y - \mathrm{rd}(y)\|_\infty}{\|y\|_\infty} \le eps$$

für alle $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ richtig ist. Dabei bedeuten $\mathrm{rd}(B) = (\mathrm{rd}(b_{ij}))_{i,j=1}^n$, $\mathrm{rd}(y) = (\mathrm{rd}(y_i))_{i=1}^n$ und eps die Maschinengenauigkeit.

Kondition linearer Gleichungssysteme

Konvergenz in normierten Räumen

Definition: $x^{(\nu)} \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - x^{(\nu)}\| \to 0, \qquad$ für $\nu \to \infty$

Satz: Die Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n,n}$ ist äquivalent zur komponentenweise Konvergenz.

Existenz und Eindeutigkeit:

Reguläre und singuläre Matrizen. Inverse Matrix.

Die Regularität von A ist äquivalent zur Existenz eindeutig bestimmter Lösungen.

Störungen von Koeffizientenmatrix A und rechter Seite b:

Normweiser absoluter und relativer Fehler.

Definition: $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ heißt Kondition von A. Beispiele.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von b.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A.

Satz: $\kappa(A)$ ist der maximale Verstärkungsfaktor des rel. Fehlers bei Störungen von A, b.

Numerische Beispiele.

Der Gaußsche Algorithmus und Varianten

Vorlesung vom 19.1.18

Gaußsche Elimination und Rückwärtssubstitution:

Motivation am Beispiel, Verallgemeinerung und Algorithmus.

Achtung: Durchführbarkeit nur bei nichtverschwindenden Pivotelementen!

Aufwand des Gaußschen Algorithmus: $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ (Aufwandsmaß: Punktoperationen).

Gaußsche Elimination, Eliminationsmatrizen G_k und LR–Zerlegung $A = LR$.

Vorteile der LR–Zerlegung bei vielen rechten Seiten und gleicher Koeffizientenmatrix.

Reduktion des Aufwands durch Ausnutzen von Spezialstruktur:

Tridiagonalmatrizen:

Invarianz der Besetzungsstruktur unter Gaußelimination.

Keine Elimination der ohnehin vorhandenen Subdiagonalnullen: Aufwand $\mathcal{O}(n)$.

Typische Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lässt sich eine LR-Zerlegung von A mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren berechnen? Falls ja, berechnen Sie die LR-Zerlegung von A. Falls nein, berechnen Sie die LR-Zerlegung einer Permutation PA mit einer geeigneten Permutationsmatrix P.

Stabilitätsanalyse des Gaußsche Algorithmus' Vorlesung vom 26.1.18

Auswirkung von Auswertungsfehlern:

Beispiel und Definition der Stabilität.
Stabilitätsanalyse in drei verschiedenen Auflösungen. Einfachster Fall:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 2\kappa(R)eps + o(eps)$$

$$\kappa(R) = \kappa\left(\prod_{k=1}^{n-1}(I - G_{n-k})A\right) \leq \kappa(A)\prod_{k=1}^{n-1}\kappa(I - G_k)$$

Fazit: Konditionsverschlechterung durch Elimination.
Extrembeispiel: Wilkinsonmatrix.

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche:

Algorithmische Konsequenzen: Pivotsuche.
Abschätzung der Stabilität: $\kappa(R) \leq 4^{n-1}\kappa(A)$.
LR-Zerlegung einer permutierten Matrix.

Typische Aufgabe

Die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, $b \neq 0$, kann durch Lösung der beiden Systeme

$$Lz = b, \qquad Rx = z$$

berechnet werden. Runden führt auf das gestörte System

$$\tilde{R}\tilde{x} = \tilde{z}, \qquad \tilde{R} = \mathrm{rd}(R), \quad \tilde{z} = \mathrm{rd}(z).$$

Geben sie eine obere Schranke für den resultierenden Fehler

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

an.

Typische Programmier-Aufgabe

Was tut dieses Programm?

Was ist hier falsch?

...

Forschungsbezogene Lehre

Vorlesung am 16.2.2018

- Nachlese
- ECMath: Aims, Plans, and Structure
- Berlin Mathematical School (BMS)

Organisatorisches zur Klausur am 9.2.2018

Verbindliche Verteilung: Anfangsbuchstaben des Nachnamens

A-K : Henry-Ford-Bau, Hörsaal B
L-Z : Henry-Ford-Bau, Hörsaal D

Beginn: 12:15 Uhr, Ende: 13:45 Uhr (90 Minuten), Ausweis mitbringen!

Erlaubt: selbst mitgebrachte schriftliche Unterlagen und Bücher.

Verboten: jegliche elektronischen Hilfs- und Kommunikationsmittel (Taschenrechner, Mobiltelefon, Laptop, ...), Täuschungsversuche