

Darstellung natürlicher und ganzer Zahlen Vorlesung vom 27.10.2017

Ziffernsysteme:

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen.

Ziffernsysteme: Definition und Beispiele.

Satz: Die Menge aller Ziffernkette $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Positionssysteme:

Definition und Beispiele.

Dezimal- und Dualdarstellung natürlicher Zahlen.

Darstellung natürlicher Zahlen im Rechner.

Ganze Zahlen:

Erweiterung der Zifferndarstellung von \mathbb{N} auf \mathbb{Z} .

Dualdarstellung mit Vorzeichenbit.

Darstellung negativer ganzer Zahlen im Rechner: Zweierkomplement.

Die rationalen Zahlen \mathbb{Q}

anschaulich:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Bruchrechenregeln:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}.$$

Die rationalen Zahlen \mathbb{Q}

anschaulich:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Bruchrechenregeln:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}.$$

mathematisch präzise:

Konstruktion von \mathbb{Q} durch Abschluß von \mathbb{Z} unter Division:

Äquivalenzklassen von Paaren (a, b) , $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Darstellung von \mathbb{Q}

Satz:

Jede Zifferndarstellung von \mathbb{N} induziert eine Zifferndarstellung von \mathbb{Q} .

Ziffernmenge: $\mathbb{Z} \cup \{-\} \cup \{/ \}$

Darstellung von \mathbb{Q}

Satz:

Jede Zifferndarstellung von \mathbb{N} induziert eine Zifferndarstellung von \mathbb{Q} .

Ziffernmenge: $\mathbb{Z} \cup \{-\} \cup \{/ \}$

Folgerung: \mathbb{Q} ist abzählbar.

Darstellung von \mathbb{Q}

Satz:

Jede Zifferndarstellung von \mathbb{N} induziert eine Zifferndarstellung von \mathbb{Q} .

Ziffernmenge: $\mathbb{Z} \cup \{-\} \cup \{/ \}$

Folgerung: \mathbb{Q} ist abzählbar.

Beispiele: **Dezimalsystem**, Dualsystem

q -adische Brüche

$$z_n \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^n z_i q^i, \quad z_i \in 0, \dots, q-1, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Beispiele:

$q = 10$: Dezimalbrüche, $q = 2$: Dualbrüche

q -adische Brüche

$$z_n \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^n z_i q^i, \quad z_i \in 0, \dots, q-1, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Beispiele:

$q = 10$: Dezimalbrüche, $q = 2$: Dualbrüche

Satz: Jeder Dualbruch ist ein Dezimalbruch, nicht umgekehrt.

q -adische Brüche

$$z_n \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^n z_i q^i, \quad z_i \in 0, \dots, q-1, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Beispiele:

$q = 10$: Dezimalbrüche, $q = 2$: Dualbrüche

Satz: Jeder Dualbruch ist ein Dezimalbruch, nicht umgekehrt.

Satz: Jeder q -adische Bruch ist eine rationale Zahl, nicht umgekehrt.

Periodische Dezimalbrüche

periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3): $0,123123123\dots = 0,\overline{123}$

Periodische Dezimalbrüche

periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3): $0,123123123\dots = 0,\overline{123}$

geometrische Reihe: $q > 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{-(m+1)}}{1 - q^{-1}} = \frac{1}{1 - q^{-1}}$$

Periodische Dezimalbrüche

periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3): $0,123123123\dots = 0,\overline{123}$

geometrische Reihe: $q > 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{-(m+1)}}{1 - q^{-1}} = \frac{1}{1 - q^{-1}}$$

Satz:

Jeder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl und umgekehrt.

Periodische Dezimalbrüche

periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3): $0,123123123\dots = 0,\overline{123}$

geometrische Reihe: $q > 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{-(m+1)}}{1 - q^{-1}} = \frac{1}{1 - q^{-1}}$$

Satz:

Jeder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl und umgekehrt.

doppelte Darstellung: $1,\overline{0} = 0,\overline{9}$

Periodische Dezimalbrüche

periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3): $0,123123123\dots = 0,\overline{123}$

geometrische Reihe: $q > 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m q^{-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{-(m+1)}}{1 - q^{-1}} = \frac{1}{1 - q^{-1}}$$

Satz:

Jeder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl und umgekehrt.

doppelte Darstellung: $1,\overline{0} = 0,\overline{9}$ Eindeutigkeit: $\overline{0}$ verboten!

Praktische Realisierung im Rechner

Darstellung als Paar von integer-Zahlen:

Länge muß variabel sein.

Aufwand für Rechenoperationen nicht a priori bekannt (Kürzen!)

Keine standardisierte Hardware-Unterstützung

Spezialanwendungen (Schnitterkennung in der Computergraphik)

Symbolik-Programme (MAPLE, MATHEMATICA, REDUCE, ...)

Die reellen Zahlen

anschaulich:

unendliche Dezimalbrüche (oder q -adische Brüche):

$$\mathbb{R} = \{ z_n \cdots z_0, z_{-1} z_{-2} \cdots \mid z_i = 0, \dots, 9, \}$$

Die reellen Zahlen

anschaulich:

unendliche Dezimalbrüche (oder q -adische Brüche):

$$\mathbb{R} = \{ z_n \cdots z_0, z_{-1} z_{-2} \cdots \mid z_i = 0, \dots, 9, \}$$

mathematisch präzise: Konstruktion von \mathbb{R} durch

Vervollständigung von \mathbb{Q} : Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen aus \mathbb{Q} .

Dedekindsche Schnitte: Menge von Paaren von Teilmengen von \mathbb{Q}

Abzählbarkeit und Zifferndarstellung

Erinnerung: Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

Erinnerung: \mathbb{Q} ist abzählbar.

Abzählbarkeit und Zifferndarstellung

Erinnerung: Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

Erinnerung: \mathbb{Q} ist abzählbar.

Satz: \mathbb{R} ist nicht abzählbar.

Abzählbarkeit und Zifferndarstellung

Erinnerung: Ein Ziffernsystem $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ hat abzählbar viele Elemente.

Erinnerung: \mathbb{Q} ist abzählbar.

Satz: \mathbb{R} ist nicht abzählbar.

Es gibt keine Zifferndarstellung von \mathbb{R} !

Numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht möglich!

Absoluter und Relativer Fehler

absoluter Fehler: $|x - \tilde{x}|$.

Absoluter und Relativer Fehler

absoluter Fehler: $|x - \tilde{x}|$.

Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$: $|x - \tilde{x}| = 1$

Absoluter und Relativer Fehler

absoluter Fehler: $|x - \tilde{x}|$.

Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$: $|x - \tilde{x}| = 1$

relativer Fehler: $\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$, $x \neq 0$.

Beispiel: $x = 1000$, $\tilde{x} = 999$: $|x - \tilde{x}|/|x| = 10^{-3}$

Festkommazahlen (q-adische Brüche)

$$z_{n-1} z_{n-2} \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i q^i, \quad z_i \in \{0, \dots, q-1\} .$$

$l = m + n$ Stellen verfügbar; $n, m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Festkommazahlen (q-adische Brüche)

$$z_{n-1} z_{n-2} \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i q^i, \quad z_i \in \{0, \dots, q-1\}.$$

$\ell = m + n$ Stellen verfügbar; $n, m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Beispiel: $q = 10, \ell = 4, n = 3, m = 1$

$x = 0,123$, Runden: $\tilde{x} = 0,1$ relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0.2$

Festkommazahlen (q-adische Brüche)

$$z_{n-1} z_{n-2} \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i q^i, \quad z_i \in \{0, \dots, q-1\} .$$

$\ell = m + n$ Stellen verfügbar; $n, m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Beispiel: $q = 10, \ell = 4, n = 3, m = 1$

$x = 0,123$, Runden: $\tilde{x} = 0,1$ relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0.2$

$x = 123$, exakt darstellbar: $\tilde{x} = 123$ relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Festkommazahlen (q-adische Brüche)

$$z_{n-1} z_{n-2} \cdots z_0, z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i q^i, \quad z_i \in \{0, \dots, q-1\} .$$

$\ell = m + n$ Stellen verfügbar; $n, m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Beispiel: $q = 10, \ell = 4, n = 3, m = 1$

$x = 0,123$, Runden: $\tilde{x} = 0,1$ relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0.2$

$x = 123$, exakt darstellbar: $\tilde{x} = 123$ relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Folgerung:

Im Sinne einer optimalen Stellenausnutzung n, m variabel halten!

Gleitkommazahlen $\mathbb{G}(\ell, q)$

Definition: (Gleitkommazahlen) Jede in der Form

$$\tilde{x} = (-1)^s a \cdot q^e \quad (1)$$

mit Vorzeichenbit $s \in \{0, 1\}$, Exponent $e \in \mathbb{Z}$ und *Mantisse* $a = 0$ oder

$$a = 0, a_1 \cdots a_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} a_i q^{-i}, \quad a_i \in \{0, \dots, q-1\}, a_1 \neq 0,$$

darstellbare Zahl \tilde{x} heißt **Gleitkommazahl** mit *Mantissenlänge* $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$.

Die Menge all dieser Zahlen heißt $\mathbb{G}(q, \ell)$.

Die Darstellung (1) heißt **normalisierte Gleitkommadarstellung**.

Gleitkommadarstellungen

Beispiel: $q = 10, \ell = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^0$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Gleitkommadarstellungen

Beispiel: $q = 10$, $\ell = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^0$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^3$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$

Gleitkommadarstellungen

Beispiel: $q = 10, \ell = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^0$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^3$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123,456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^3$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$

Gleitkommadarstellungen

Beispiel: $q = 10$, $\ell = 4$

- $x = 0,123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^0$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1230 \cdot 10^3$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| = 0$
- $x = 123,456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^3$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$
- $x = 0,00123456$ wird dargestellt als $\tilde{x} = 0,1235 \cdot 10^{-2}$
relativer Fehler: $|x - \tilde{x}|/|x| \approx 0,00036$