Wiederholung: Kondition (Vorlesung vom 17.11.17)

Relative Kondition der Grundrechenarten:

Addition, Multiplikation und Division liefern beruhigende Resultate.

Die Subtraktion ist hingegen beliebig schlecht konditioniert (Auslöschung).

Deshalb: Subtraktion fast gleich großer Zahlen vermeiden.

Absolute Kondition von Funktionsauswertungen:

Die absolute Kondition κ_{abs} ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \quad \text{für } x \to x_0$$

Sätze zur absoluten Kondition:

Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)|$.

Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq L$.

Für geschachtelte Funktionen $f(x) = g(h(x))$ gilt $\kappa_{\text{abs}} \leq \kappa_{\text{abs}}(g, y_0)\ \kappa_{\text{abs}}(h, x_0)$.

Relative und absolute Kondition: $\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \kappa_{\text{abs}}$

Absolute Kondition der Funktionsauswertung

gegeben: Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \mapsto \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in I$

Problem: $\quad (*)$ $\quad \boxed{\text{Auswertung von } f \text{ an der Stelle } x_0}$

Definition (Absolute Kondition)

Die absolute Kondition κ_{abs} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{\text{abs}}|x_0 - x| + o(|x_0 - x|) \quad \text{für } x \to x_0.$$

Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{abs} vor, so wird $\kappa_{\text{abs}} = \infty$ gesetzt.

Absolute Kondition und Ableitung

Satz: Ist f differenzierbar in x_0, so gilt $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)|$.

Beispiele:

$f(x) = ax$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)| = |a|$

$f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)| = 2|x_0|$.

Absolute Kondition und Lipschitz-Stetigkeit

Definition: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, falls

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in I \ .$$

Beispiel: $f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$.

Satz: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so genügt die absolute Kondition κ_{abs} von $(*)$ der Abschätzung

$$\kappa_{\text{abs}} \leq L \ .$$

Relative Kondition von Funktionsauswertungen

gegeben: Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R}$, $\quad 0 \neq x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$

Problem: $\quad (*)$ $\quad$ $\boxed{\text{Auswertung von } f \text{ an der Stelle } x_0}$

Definition 3.6 (Relative Kondition)

Die relative Kondition κ_{rel} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + o(|x_0 - x|) \quad \text{für } x \to x_0.$$

Liegt dies für keine reelle Zahl κ_{rel} vor, so wird $\kappa_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

Relative versus absolute Kondition

Beispiel: $f(x) = ax$,

absolute Kondition:

$$\kappa_{\text{abs}} = |f'(x_0)| = |a|$$

relative Kondition:

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|}\kappa_{\text{abs}} = \frac{|x_0|}{|ax_0|}|a| = 1$$

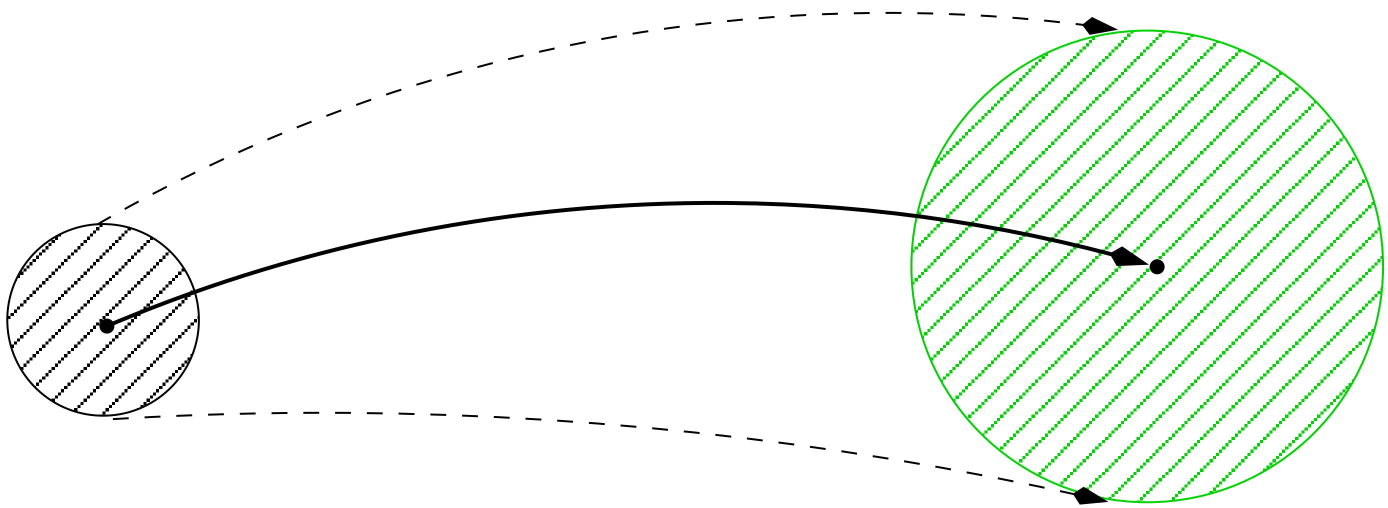
Folgerung: κ_{abs} und κ_{rel} können sich beliebig stark unterscheiden:

aus $|a| \gg 1$ folgt $\kappa_{\text{abs}} \gg \kappa_{\text{rel}}$ aus $|a| \ll 1$ folgt $\kappa_{\text{abs}} \ll \kappa_{\text{rel}}$

weiteres Beispiel: absolute Kondition der Subtraktion

Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems:

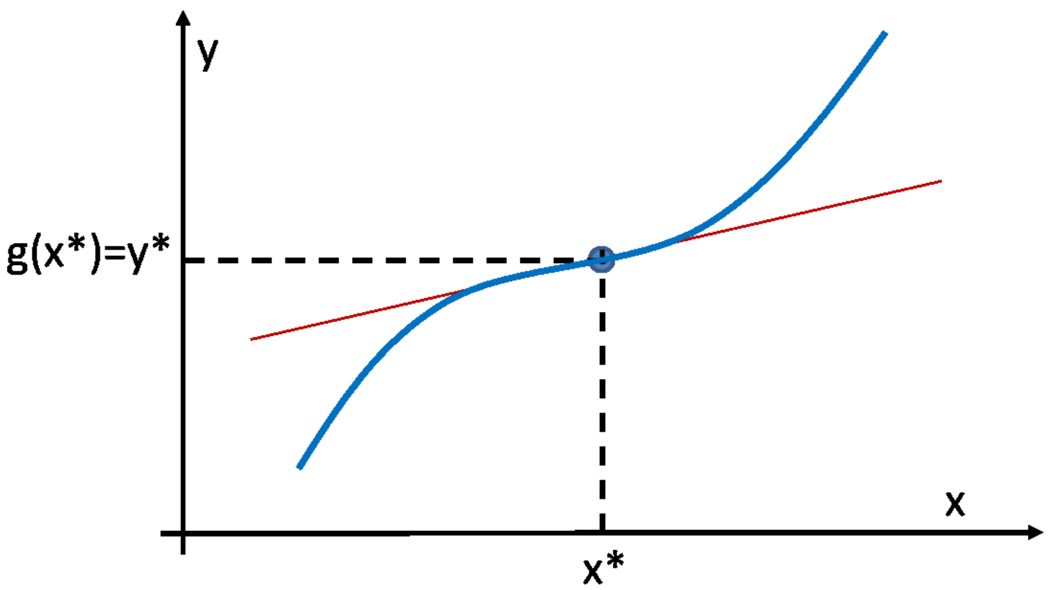
Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis



Nichtlineare Gleichungen

gegeben: Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $\quad g : I \mapsto \mathbb{R}$, $\quad y^* \in \mathbb{R}$

Problem: $\quad (*) \qquad \boxed{\text{Finde } x^* \in I \text{ so dass } g(x^*) = y^*}$



Absolute Kondition

Definition 6.16: (Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen)
Die absolute Kondition κ_{abs} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$|x^* - x| \le \kappa_{\text{abs}} |y^* - y| + o(|y^* - y|) \quad \text{für } y \to y_0$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y|$ zu y^* und den zugehörigen Lösungen x des gestörten Problems

$$x \in I : \qquad g(x) = y \ .$$

Existiert keine solche reelle Zahl κ_{abs}, so wird $\kappa_{\text{abs}} = \infty$ gesetzt.

Existenz und Eindeutigkeit gestörter Lösungen

Lemma 6.17:

Sei g stetig differenzierbar in (a, b), $g(x^*) = y^*$ sowie

$$g'(x^*) \neq 0.$$

Dann gibt es α, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < x^* < \beta < b$,
so daß das gestörte Problem $x : g(x) = y$ für jedes $y \in V = (g(\alpha), g(\beta))$
eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in U = (\alpha, \beta)$ besitzt.

Folgerung:

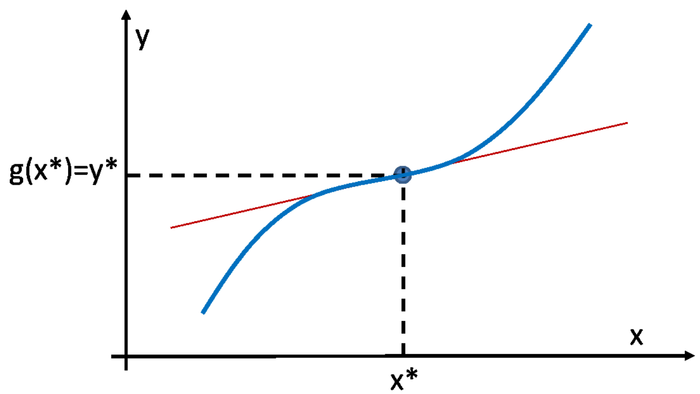
Falls $g'(x^*) \neq 0$ existiert eine Umkehrfunktion $g^{-1} : V \to U$ so dass

$$g(g^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in V.$$

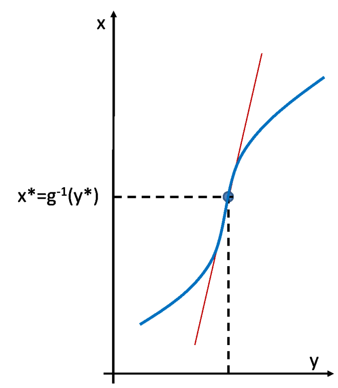
Äquivalentes Problem: Auswertung der Umkehrfunktion

gegeben: Intervall $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $y^* \in V$ mit $g'(x^*) \neq 0$

Problem: $\boxed{\text{Auswertung von } g^{-1} : V \to \mathbb{R} \text{ an der Stelle } y^* \in V}$



$$y = g(x)$$

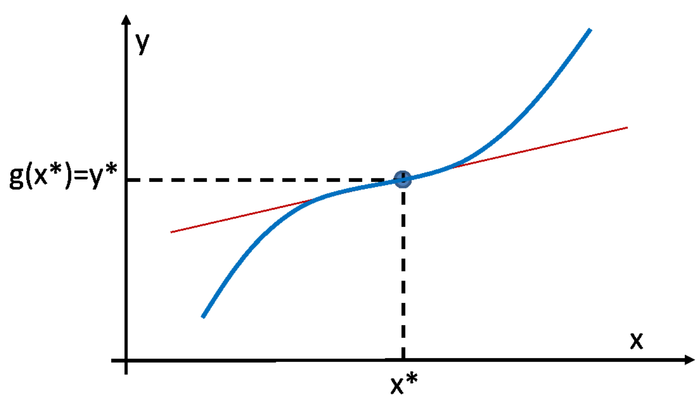


$$x = g^{-1}(y)$$

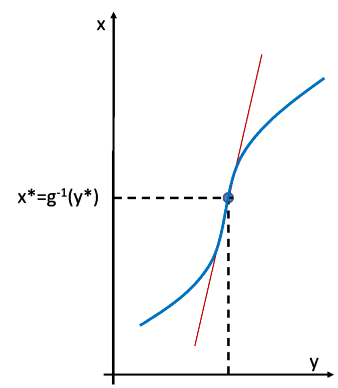
Absolute Kondition der Umkehrfunktion

Lemma 6.18.
Es sei $g \in C^1(a,b)$, $g(x) = y \in V$ und $g'(x) \neq 0$.
Dann ist g^{-1} differenzierbar in y und es gilt

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)} \quad \forall y \in V \ .$$



$y = g(x)$



$x = g^{-1}(y)$

Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz 6.19

Es sei $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$.
Dann ist die absolute Kondition κ_{abs} der Lösung von

$$x^* \in I: \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $\quad y = g(x) = ax$, $a \neq 0$, $\quad x = g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y$,

Absolute Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz 6.19
Es sei $g \in C^1(a,b)$, $g(x^*) = y^*$ und $g'(x^*) \neq 0$.
Dann ist die absolute Kondition κ_{abs} der Lösung von

$$x^* \in I : \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $\quad y = g(x) = ax,\ a \neq 0, \quad x = g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y, \quad \kappa_{\text{abs}} = \frac{1}{|a|}$

Relative Kondition

Definition 6.16: (Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen)
Die relative Kondition κ_{rel} von $(*)$ ist die kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{\kappa_{\text{rel}} |y^* - y|}{|y^*|} + o(|y^* - y|) \quad \text{für } y \to y_0$$

für alle rechten Seiten $y \neq y^*$ mit genügend kleinem Abstand $|y^* - y| > 0$ zu y^* und den zugehörigen Lösungen x des gestörten Problems

$$x \in I : \qquad g(x) = y \ .$$

Existiert keine solche reelle Zahl κ_{rel}, so wird $\kappa_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

Relative Kondition nichtlinearer Gleichungen

Satz 6.21
Es sei $g \in C^1(a,b)$, $x^* \neq 0$, $g(x^*) = y^* \neq 0$ und $g'(x^*) \neq 0$.
Dann ist die relative Kondition κ_{abs} der Lösung von

$$x^* \in I: \quad g(x^*) = y^*$$

bei Störung der rechten Seite y^* gegeben durch

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*||g'(x^*)|}.$$

Beispiel: $g(x) = ax$, $a \neq 0$, $\quad g^{-1}(y) = \frac{1}{a}y$, $\quad \kappa_{\text{rel}} = \frac{|ax^*|}{|x^*||a|} = 1$

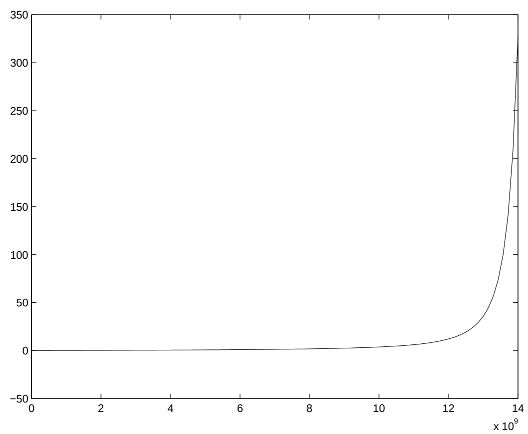
Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Problem:

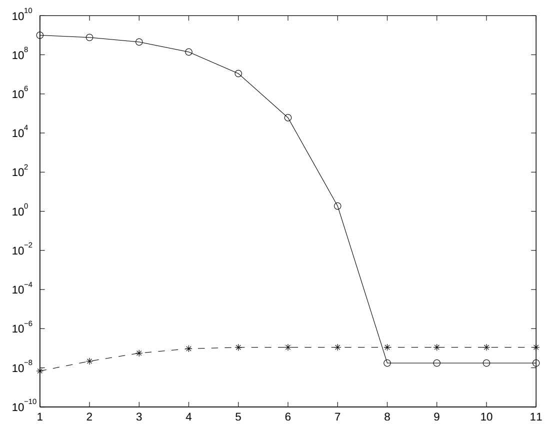
$$x^* \in (0, \pi): \quad g(x^*) = y^*, \quad g(x) = \exp(10^{-9} \tan(x-1))), \ \ y^* = 1$$

Lösung: $x^* = 1, \quad \gamma = 10^9$

Kondition: $\kappa_{\text{rel}} = 1/g'(x^*) = 10^9$, Genauigkeitsschranke: $\frac{1}{2}\gamma eps \approx 10^{-7}$



$g(x)$



Iterationsgeschichte

Beispiel: Grenzen der Genauigkeit

Problem:

$$x^* \in (0,\pi): \quad g(x^*) = y^*, \quad g(x) = \exp(10^{-9}\tan(x-1))), \ \ y^* = 1$$

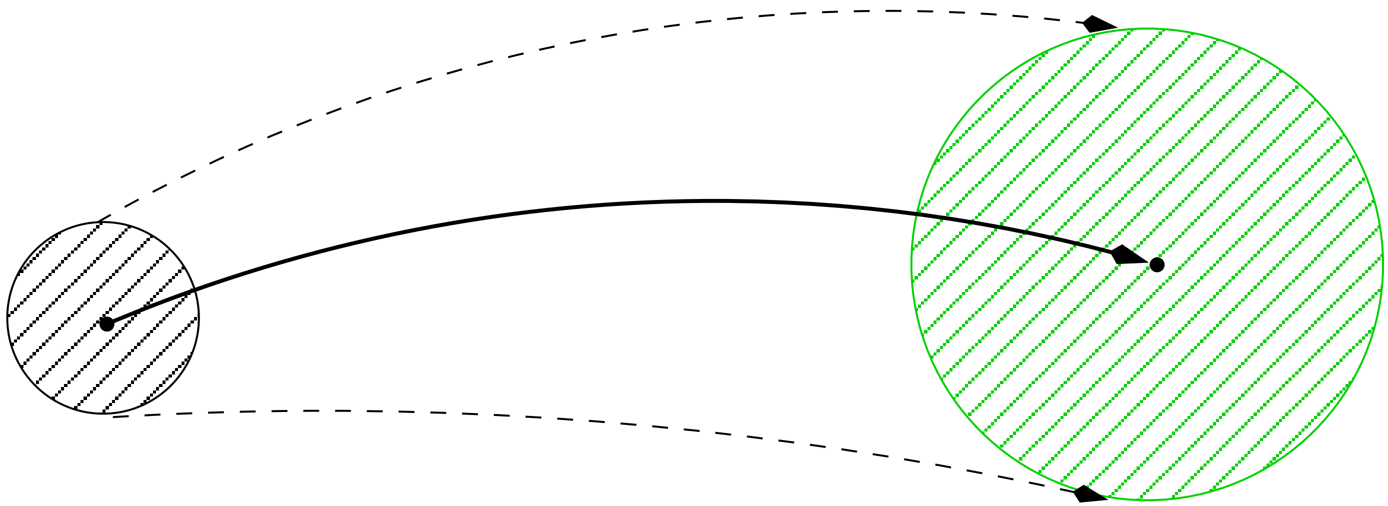
Lösung: $x^* = 1$,

Kondition: $\kappa_{\text{rel}} = 1/g'(x^*) = \gamma$, Genauigkeitsschranke: $\frac{1}{2}\kappa_{\text{rel}} eps = \frac{1}{2}\gamma eps$

γ	10	10^6	10^9	10^{14}
$\frac{1}{2}\kappa_{\text{rel}} eps$	$1.11 \cdot 10^{-15}$	$1.11 \cdot 10^{-10}$	$1.11 \cdot 10^{-7}$	$1.11 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\lvert x^* - x_{n^*}\rvert}{\lvert x^*\rvert}$	$4.44 \cdot 10^{-16}$	$1.00 \cdot 10^{-10}$	$1.74 \cdot 10^{-8}$	$5.52 \cdot 10^{-3}$

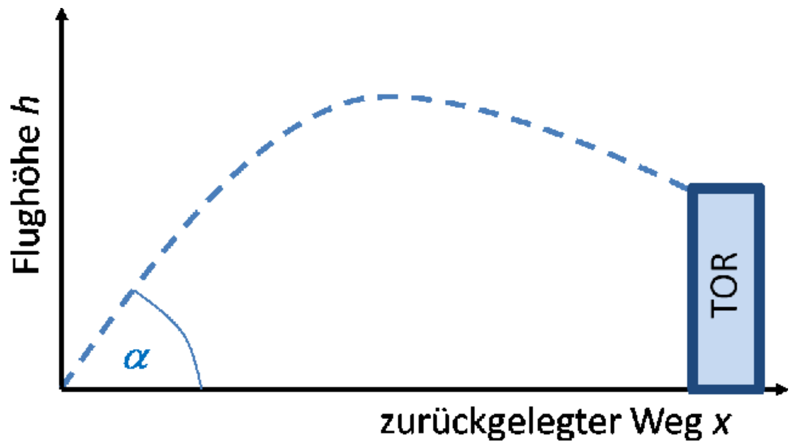
Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems:

Auswirkung von Eingabefehlern auf das Ergebnis



Ronaldinho und die Kondition

Mathematisches Modell: Überflughöhe

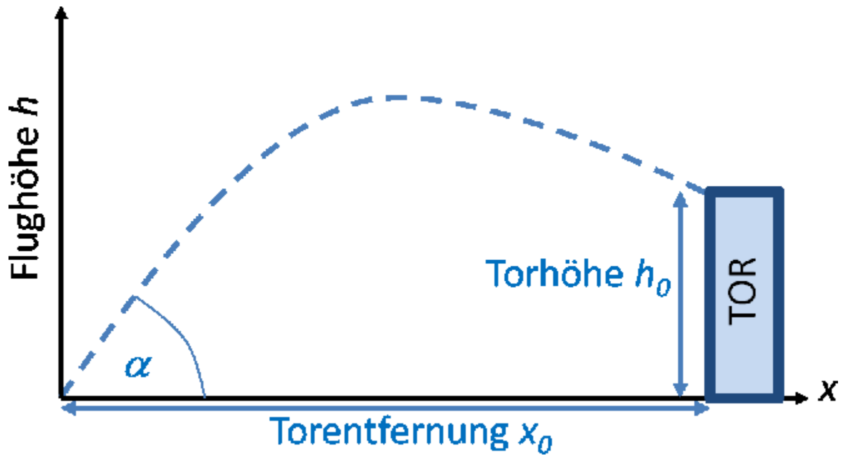


Flughöhe und zurückgelegter Weg
in Abhängigkeit von Zeit t, Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$\begin{aligned} h(t) &= vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ x(t) &= vt\cos\alpha \end{aligned}$$

g: Fallbeschleunigung $= 9.81m/s^2$

Mathematisches Modell: Flugkurve

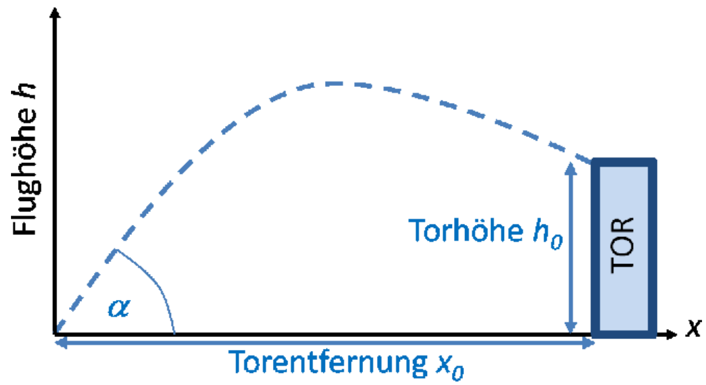


Überflughöhe über der Torlinie
in Abhängigkeit von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v,\alpha) = x_0 \tan\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x_0^2}{v^2 \cos^2\alpha}$$

g: Fallbeschleunigung $= 9.81 m/s^2$

Lattentreffer mit zurückspringendem Ball



Überflughöhe abhängig von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h \in (2.50\ m \pm 0.04\ m)$$

Torhöhe: $h_0 = 2.50\ m$, Lattenbreite: $12\ cm$

physiologische Grenzen: Streuung von $\Delta v_{\mathrm{Mensch}} = 0.28\ m/s \approx 1\ km/h$

Kondition

Überflughöhe abhängig von Abschussgeschwindigkeit v und -winkel α

$$H(v_0 + \Delta v, \alpha_0 + \Delta\alpha) = h_0 + \Delta h \in (2.50m \pm 0.04m)$$

Erlaubter “Eingabefehler”: Δv und $\Delta\alpha$, so dass $|\Delta h| \leq 0.04$

Vereinfachung: fester Abschusswinkel $\Delta\alpha = 0$ ($\Delta\alpha \neq 0$ siehe Skript 6.6)

$$|\Delta h(\Delta v)| = |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| \leq 0.04m$$

Kondition: (bei festem $\alpha = \alpha_0$)

$$\begin{aligned} |H(v_0 + \Delta v, \alpha_0) - H(v_0, \alpha_0)| &\leq \kappa_{\text{abs}}(H, v_0) \cdot |\Delta v| + o(\Delta v) \\ \kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \left| \frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0) \right| \end{aligned}$$

Absolute Kondition

fester Abschusswinkel: $\alpha_0 = 45^o$

$$H(v, \alpha_0) = x_0 - g\frac{x_0^2}{v^2}$$

Konditionsberechnung:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \left|\frac{dH}{dv}(v_0, \alpha_0)\right| = 2g\frac{x_0^2}{v_0^3} \\
v_0 &= \frac{x_0\sqrt{g}}{\sqrt{x_0 - h_0}} = 49 \text{ km/h} \\
\kappa_{\text{abs}}(H, v_0) &= \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{(x_0 - h_0)^{3/2}}{x_0} = 1.98 \text{ s}
\end{aligned}$$

Ronaldinhos Kondition: Fehler in der Überflughöhe

Eingabefehler: $\Delta\alpha = 0$ (Abschusswinkel), Δv (Abschussgeschwindigkeit)

Auswirkung: $\Delta h = \kappa_{\text{abs}} \Delta v + o(|\Delta v|)$

Anforderung (bei $\alpha = \alpha_0$): Abschussgeschwindigkeit von 49 km/h bis auf

$$\Delta h \leq 0.04m : \qquad \Delta v_{\text{Ronaldinho}} \leq 0.073 \text{ km/h}$$

treffen, also etwa auf ein Promille genau.

physiologische Grenze: Streuung von $\Delta v_{\text{Mensch}} \approx 1\ km/h$

Ronaldinhos Lattentreffer

$$\Delta v_{\text{Mensch}} \approx 1. \; > \; 10 \cdot 0.073 \; \geq 10 \cdot \Delta v_{\text{Ronaldinho}}$$

Ronaldinho hat geschummelt oder ist kein Mensch!