

Kondition: Anwendungen

Vorlesung vom 24.11.17

Kondition nichtlinearer Gleichungen:

Problem: Finde x^* , so dass $g(x^*) = y^*$

Definition der absolute Kondition κ_{abs} :

Auswirkung von Fehlern in der rechten Seite y^* auf die Lösung

Satz:

Hinreichende Bedingungen für die Existenz von g^{-1} in einer Umgebung von y^* .

Äquivalentes Problem: Auswertung der Umkehrfunktion g^{-1} an der Stelle y^*

Satz: $\kappa_{\text{abs}} = |(g^{-1})'(y^*)| = |g'(x^*)|^{-1}$

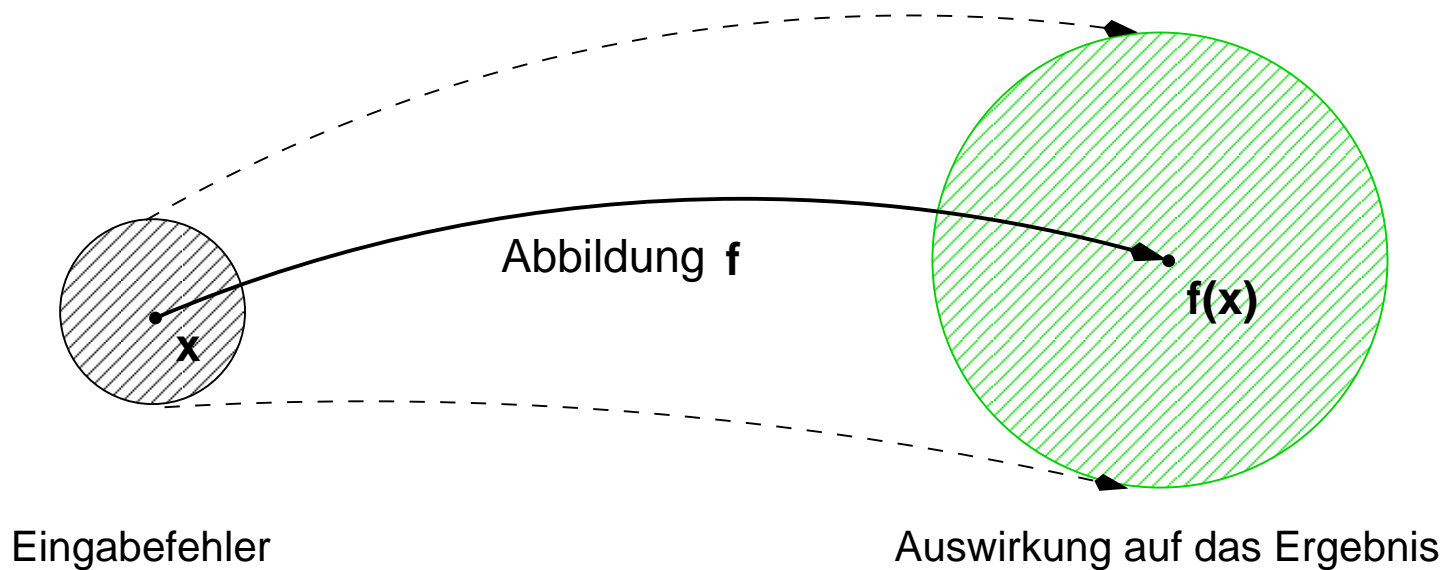
Definition und Berechnung der relativen Kondition: klar!

Grenzen der Genauigkeit

Ronaldinhos Kondition

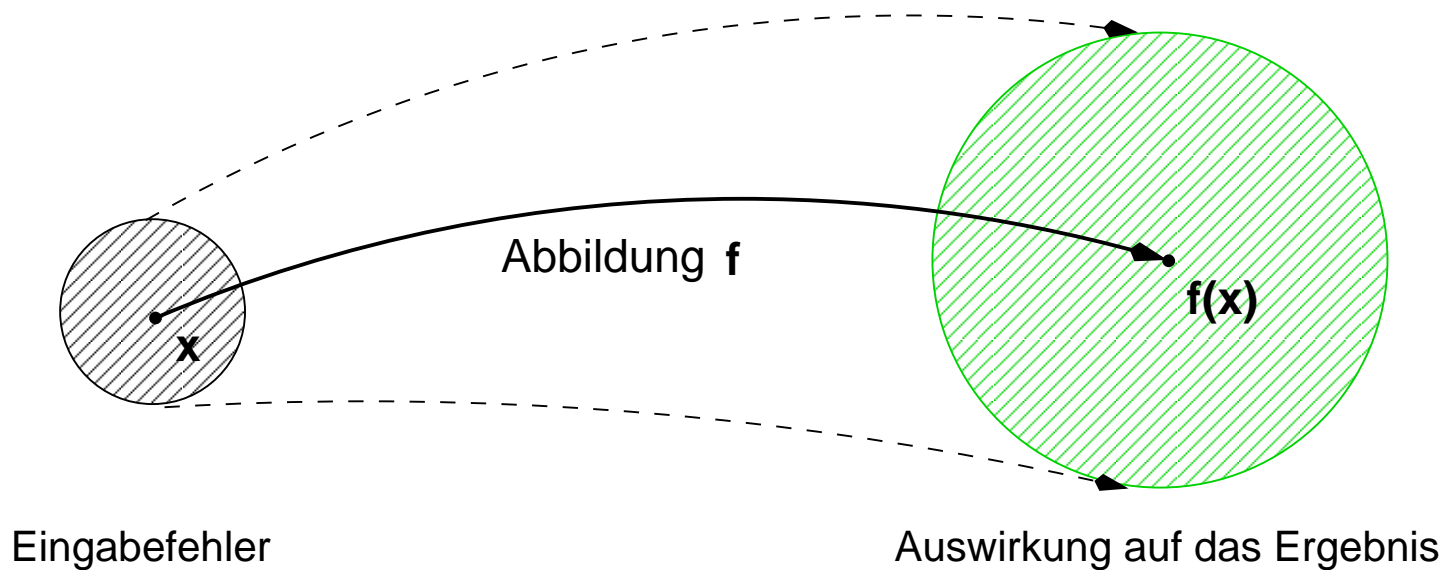
Kondition

Auswirkung von **Eingabefehlern** auf das Ergebnis:



Kondition

Auswirkung von **Eingabefehlern** auf das Ergebnis:



Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a = 4999999;  
>> x = 10000000;  
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3
```

```
f =  
    393216
```

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a = 4999999;  
>> x = 10000000;  
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3
```

```
f =  
    393216
```

```
>> f = (x-2*a)^3
```

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a = 4999999;  
>> x = 10000000;  
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3
```

```
f =  
    393216
```

```
>> f = (x-2*a)^3
```

```
f =  
     8
```

Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Problem: Auswertung von $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x - 2a)^3$
an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$ für $a = 4\,999\,999$.

```
>> a = 4999999;  
>> x = 10000000;  
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3
```

```
f =  
    393216
```

```
>> f = (x-2*a)^3
```

```
f =  
     8
```

Was ist hier schief gelaufen?

Erinnerung: Computer können nicht rechnen!

Äquivalente Umformungen in \mathbb{R} sind in Gleitkommaarithmetik nicht äquivalent.

Beispiele:

keine binomische Formel:

$$(a \tilde{+} b) \tilde{*} (a \tilde{+} b) \neq a \tilde{*} a \tilde{+} 2 \tilde{*} a \tilde{*} b \tilde{+} b \tilde{*} b$$

kein Assoziativgesetz:

$$(a \tilde{*} a \tilde{+} 2 \tilde{*} a \tilde{*} b) \tilde{+} b \tilde{*} b \neq a \tilde{*} a \tilde{+} (2 \tilde{*} a \tilde{*} b \tilde{+} b \tilde{*} b)$$

It is hard, but it's harder to ignore it Cat Stevens

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein **Algorithmus** ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i , $i = 1, \dots, n$.

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein **Algorithmus** ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i , $i = 1, \dots, n$.

Beispiel:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0), \quad g_1(x_0) = ax_0, \quad g_2(y) = y + b$$

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein **Algorithmus** ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i , $i = 1, \dots, n$.

Beispiel:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0), \quad g_1(x_0) = ax_0, \quad g_2(y) = y + b$$

$$f(x_0) = ax_0 + b = a \left(x_0 + \frac{b}{a} \right) = h_2 \circ h_1(x_0), \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a}, \quad h_2(y) = ay$$

Algorithmen zur Funktionsauswertung

gegeben: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$

Ein **Algorithmus** ist eine Zerlegung

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

der Funktion f in elementare Funktionen g_i , $i = 1, \dots, n$.

Beispiel:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0), \quad g_1(x_0) = ax_0, \quad g_2(y) = y + b$$
$$f(x_0) = ax_0 + b = a \left(x_0 + \frac{b}{a} \right) = h_2 \circ h_1(x_0), \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a}, \quad h_2(y) = ay$$

Welcher Algorithmus ist besser?

Gleitkommarechnung

gegeben: Ein Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

zur Auswertung von f an der Stelle x_0 .

Gleitkommarechnung

gegeben: Ein Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

zur Auswertung von f an der Stelle x_0 .

Realisierung im Rechner: **Auswertungsfehler**

$$\tilde{f}(x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

Gleitkommarechnung

gegeben: Ein Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

zur Auswertung von f an der Stelle x_0 .

Realisierung im Rechner: **Auswertungsfehler**

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_n \circ \tilde{g}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

...durch Runden nach jeder Elementaroperation:

$$\tilde{g}_i(y) = (1 + \varepsilon_i)g_i(y), \quad |\varepsilon_i| \leq eps, \quad i = 1, \dots, n, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

Merksatz

Verschiedene Algorithmen führen zu verschiedenen Ergebnissen

...aber welcher Algorithmus ist besser?

Algorithmus A:

$$f(x_0) = ax_0 + b = g_2 \circ g_1(x_0), \quad g_1(x_0) = ax_0, \quad g_2(y) = y + b$$

Algorithmus B:

$$f(x_0) = ax_0 + b = a \left(x_0 + \frac{b}{a} \right) = h_2 \circ h_1(x_0), \quad h_1(x_0) = x_0 + \frac{b}{a}, \quad h_2(y) = ay$$

Relative Stabilität: Auswirkung von Gleitkommarechnung

Bezeichnung: $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ gegeben. Wir setzen $\|\varepsilon\| = \max_{i=1, \dots, n} |\varepsilon_i|$.

Definition 7.4: Die **relative Stabilität** σ_{rel} des Algorithmus'

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1(x_0) \neq 0$$

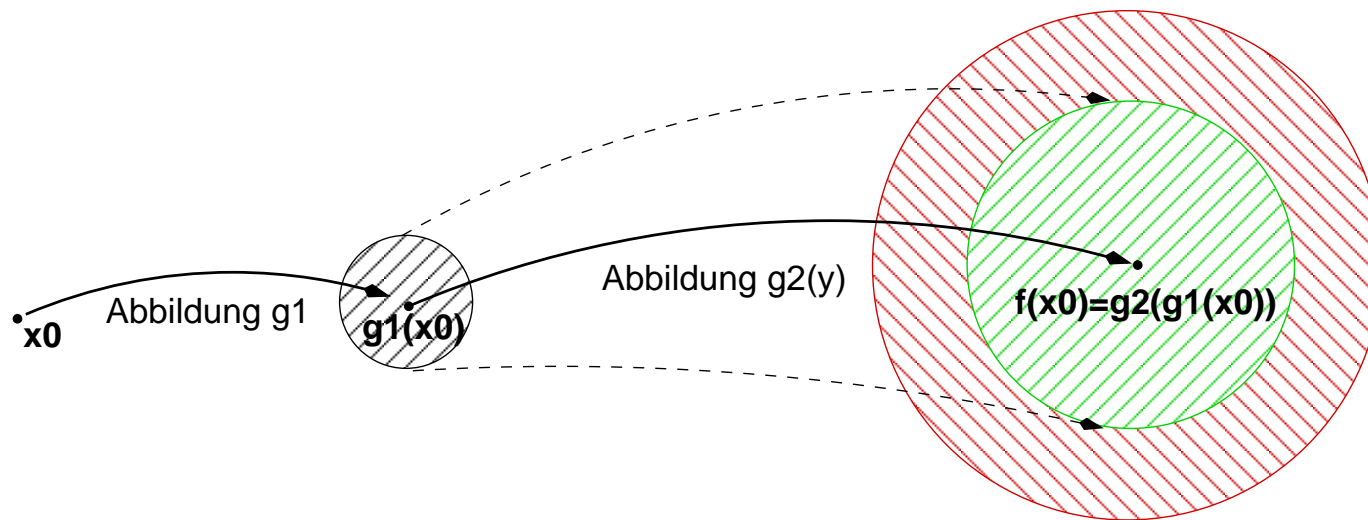
gegenüber Rundungsfehlern $\tilde{g}_i(y) = g_i(y)(1 + \varepsilon_i)$, $|\varepsilon_i| \leq \text{eps}$,
ist die kleinste Zahl σ_{rel} mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_{\text{rel}} \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|).$$

Liegt dies für keine reelle Zahl σ_{rel} vor, so wird $\sigma_{\text{rel}} = \infty$ gesetzt.

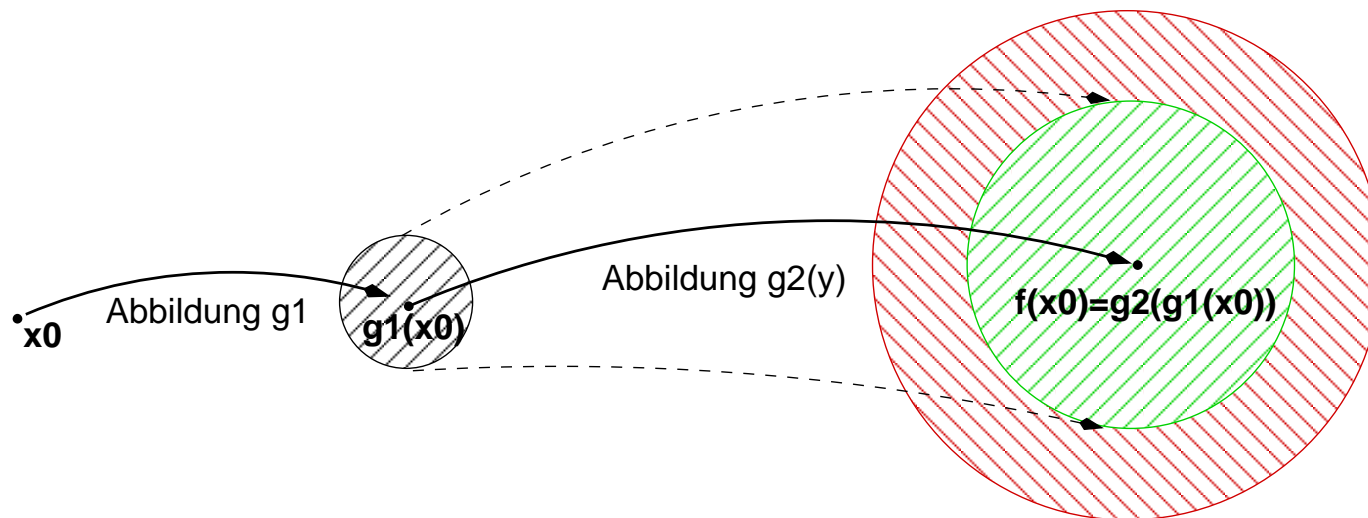
Stabilität

Auswirkung von **Störungen der Elementarfunktionen** auf das Ergebnis:



Stabilität

Auswirkung von **Störungen der Elementarfunktionen** auf das Ergebnis:



Die Stabilität ist eine Eigenschaft des Algorithmus!

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x), \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x) = \cos(x)$, $g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)$, $g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\tilde{f}(\varepsilon, x_0) = \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0)$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x), \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\ &= (1 + \varepsilon_3) \left(1 + \sqrt{(1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{2} (1 - (1 + \varepsilon_1) \cos(2\pi)) \right)} \right) \end{aligned}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x), \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\ &= (1 + \varepsilon_3) \left(1 + \sqrt{(1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{2} (1 - (1 + \varepsilon_1) \cos(2\pi)) \right)} \right) \\ &= (1 + \varepsilon_3) \left(1 + \sqrt{(1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{2} (-\varepsilon_1) \right)} \right) \end{aligned}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$$g_1(x) = \cos(x), \quad g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1), \quad g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$$

Runden der Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varepsilon, x_0) &= \tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1(x_0) \\ &= (1 + \varepsilon_3) \left(1 + \sqrt{(1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{2}(1 - (1 + \varepsilon_1) \cos(2\pi)) \right)} \right) \\ &= (1 + \varepsilon_3) \left(1 + \sqrt{(1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{2}(-\varepsilon_1) \right)} \right) \end{aligned}$$

Nicht reell auswertbar für beliebig kleine $\varepsilon_1 > 0$: $\sigma_{\text{rel}} = \infty$

Stabilitätsabschätzungen: Grundrechenarten

Satz 7.9: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0), h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0), \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h . Dann gilt jeweils

$$f(x_0) = g(x_0) + h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

$$f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

$$f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

$$f(x_0) = g(x_0)/h(x_0) \quad : \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\},$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0), h(x_0) > 0$ vorausgesetzt ist.

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 7.8: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1} , und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \dots \circ g_1(x_0), \quad y_i = g_i(y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad y_0 = x_0.$$

Dann gilt

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^n \kappa_i = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \dots \kappa_3(1 + \kappa_2) \dots)).$$

Stabilitätsabschätzung: Induktionsanfang ($n = 1$)

trivialer Algorithmus: Sei

$$f(x_0) = g_1(x_0)$$

Dann gilt

$$\sigma_{\text{rel}} = 1$$

Beweis:

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} = \frac{|f(x_0) - (1 + \varepsilon)f(x_0)|}{|f(x_0)|} = |\varepsilon|$$

Stabilitätsabschätzung: Induktionsschluss ($n \Rightarrow n + 1$)

Satz 7.6: Sei

$$y = h(x_0) = g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

und die Stabilität dieses Algorithmus sei σ_h , d.h.

$$\frac{|h(x_0) - \tilde{h}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_h \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

Sei weiter $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$ wobei κ_n die Kondition von g_n ist.

Dann gilt für die Stabilität σ_{rel} von $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_n \sigma_h$$

Stabilitätsabschätzung: Induktionsschluss ($n \Rightarrow n + 1$)

Satz 7.6: Sei

$$y = h(x_0) = g_{n-1} \circ g_{n-2} \circ \cdots \circ g_1(x_0)$$

und die Stabilität dieses Algorithmus sei σ_h , d.h.

$$\frac{|h(x_0) - \tilde{h}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_h \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

Sei weiter $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$ wobei κ_n die Kondition von g_n ist.

Dann gilt für die Stabilität σ_{rel} von $f(x_0) = g_n \circ h(x_0)$

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_n \sigma_h = 1 + \kappa_n (1 + \kappa_{n-1} (1 + \dots \kappa_3 (1 + \kappa_2) \dots))$$

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 7.8: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1} , und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \dots \circ g_1(x_0), \quad y_i = g_i(y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad y_0 = x_0.$$

Dann gilt

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^n \kappa_i = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \dots \kappa_3(1 + \kappa_2) \dots)).$$

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen verschlechtern die Stabilität!

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)$, $g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)$, $g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)$, $g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)$, $g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta,$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)$, $g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)$, $g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \quad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1 - y_1|} = \frac{1 - \delta}{\delta},$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)$, $g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)$, $g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \quad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1 - y_1|} = \frac{1 - \delta}{\delta},$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2,$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)$, $g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)$, $g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \quad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1 - y_1|} = \frac{1 - \delta}{\delta},$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \quad \kappa_3 = \frac{|g_3'(y_2)||y_2|}{|g_3(y_2)|} = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1 + \sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2 + \sqrt{2\delta}}$$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)$, $g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)$, $g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \quad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1 - y_1|} = \frac{1 - \delta}{\delta},$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \quad \kappa_3 = \frac{|g_3'(y_2)||y_2|}{|g_3(y_2)|} = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1 + \sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2 + \sqrt{2\delta}}$$

Stabilitätsabschätzung (Satz 7.8): $\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2)$

Beispiel

Problem: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))}$, $x_0 = 2\pi - \varepsilon$

Algorithmus: $f(x_0) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x_0)$

$g_1(x_0) = \cos(x_0)$, $g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1)$, $g_3(y_2) = 1 + \sqrt{y_2}$

Kondition der Auswertung der Elementarfunktionen:

$$y_1 = g_1(x_0) = \cos(x_0) = 1 - \delta, \quad \kappa_2 = \frac{|g_2'(y_1)||y_1|}{|g_2(y_1)|} = \frac{|y_1|}{|1 - y_1|} = \frac{1 - \delta}{\delta},$$

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{2}(1 - y_1) = \delta/2, \quad \kappa_3 = \frac{|g_3'(y_2)||y_2|}{|g_3(y_2)|} = \frac{\sqrt{y_2}}{2(1 + \sqrt{y_2})} = \frac{\sqrt{\delta/2}}{2 + \sqrt{2\delta}}$$

Stabilitätsabschätzung (Satz 7.8): $\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2)$

beliebig große Schranke: $1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \geq \frac{1 - \delta}{6\sqrt{\delta}} \rightarrow \infty$ für $\varepsilon \rightarrow 0$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2(\alpha/2)$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)$, $y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}$, $h_2(y) = 1 + \sin(y)$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)$, $y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}$, $h_2(y) = 1 + \sin(y)$

Stabilitätsabschätzung: $\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_2$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)$, $y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}$, $h_2(y) = 1 + \sin(y)$

Stabilitätsabschätzung: $\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_2 = 1 + \frac{|y| |\cos(y)|}{|1 + \sin(y)|}$

1. Merksatz

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!

Beispiel: trigonometrische Formel: $1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2(\alpha/2)$

einsetzen: $f(x_0) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(x_0))} = 1 + \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Algorithmus: $f(x_0) = h_2 \circ h_1(x_0)$, $y = h_1(x_0) = \frac{x_0}{2}$, $h_2(y) = 1 + \sin(y)$

Stabilitätsabschätzung: $\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \kappa_2 = 1 + \frac{|y| |\cos(y)|}{|1 + \sin(y)|} \rightarrow 1 + \pi$

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 = 2*3.1415926;  
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)
```

```
fg =  
    1.000000053726901
```


Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 = 2*3.1415926;  
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)
```

```
fg =  
    1.000000053726901
```

```
>> fh=1+sin(x0/2)
```

```
fh =  
    1.000000053589793
```

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 = 2*3.1415926;  
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)
```

```
fg =  
    1.000000053726901
```

```
>> fh=1+sin(x0/2)
```

```
fh =  
    1.000000053589793
```

Stabilitätsanalyse von f_g : $\sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 = 2*3.1415926;  
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)
```

```
fg =  
    1.000000053726901
```

```
>> fh=1+sin(x0/2)
```

```
fh =  
    1.000000053589793
```

Stabilitätsanalyse von f_g : $\sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

```
>> abs(fh-fg)/abs(fh*eps)
```

Numerisches Experiment mit Matlab

```
>> x0 = 2*3.1415926;  
>> fg=1+sqrt((1-cos(x0))/2)
```

```
fg =  
    1.000000053726901
```

```
>> fh=1+sin(x0/2)
```

```
fh =  
    1.000000053589793
```

Stabilitätsanalyse von f_g : $\sigma_g \leq 1 + \kappa_3(1 + \kappa_2) \approx 4.6 \cdot 10^6$

```
>> abs(fh-fg)/abs(fh*eps)
```

```
ans =  
    6.174769669095370e+05
```

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 4.7: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1} , und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \dots \circ g_1(x_0), \quad y_i = g_i(y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad y_0 = x_0.$$

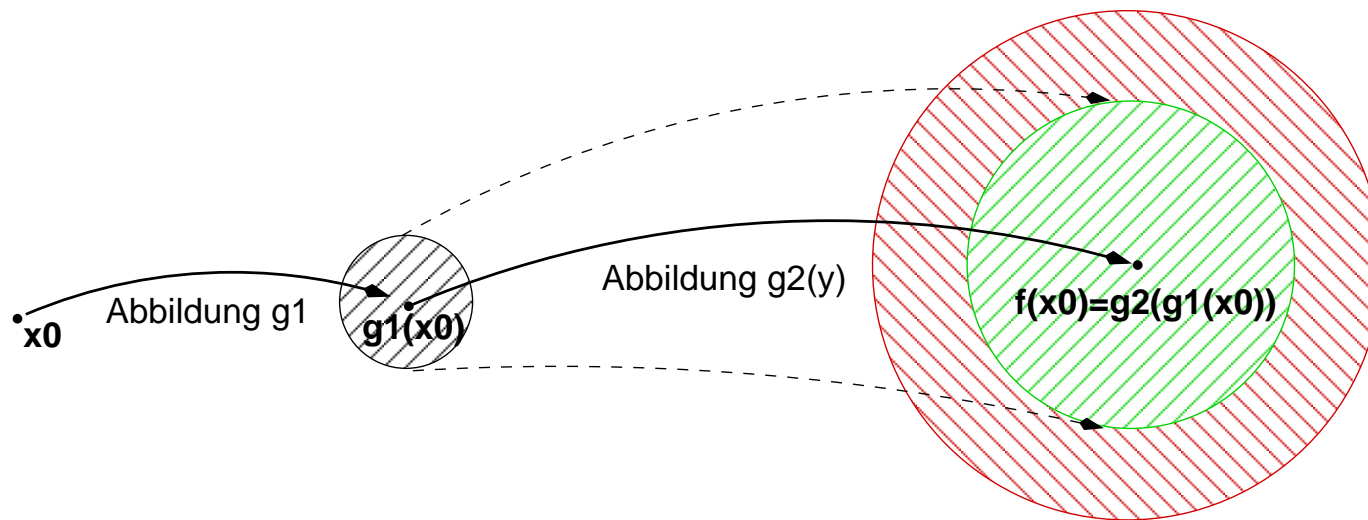
Dann gilt

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^n \kappa_i = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \dots \kappa_3(1 + \kappa_2) \dots)).$$

κ_1 geht nicht in die Abschätzung ein!

Stabilität

Auswirkung von **Störungen der Elementarfunktionen** auf das Ergebnis:



2. Merksatz

Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a = 4999999;  
>> x = 10000000;  
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3
```

```
f =  
393216
```


Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a = 4999999;  
>> x = 10000000;  
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3
```

```
f =  
    393216
```

```
>> f = (x-2*a)^3
```

```
f =  
     8
```

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a = 4999999;  
>> x = 10000000;  
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3
```

```
f =  
    393216
```

```
>> f = (x-2*a)^3
```

```
f =  
     8
```

Was ist hier schiefgelaufen?

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x, \quad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x, \quad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)| + |g_2(x_0)|}{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x, \quad g_2(x) = 6ax^2 + 8a^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)| + |g_2(x_0)|}{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0), \quad h_1(x_0) = x_0 - 2a, \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x, \quad g_2(x) = 6ax^2 + 8a^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)| + |g_2(x_0)|}{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0), \quad h_1(x_0) = x_0 - 2a, \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$$

Grobe Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3 \\ &= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0) \end{aligned}$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x, \quad g_2(x) = 6ax^2 + 8a^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_g \leq 1 + \frac{|g_1(x_0)| + |g_2(x_0)|}{|g_1(x_0) - g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0), \quad h_1(x_0) = x_0 - 2a, \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

$$\text{Stabilitätsschranke: } \sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$$

tatsächliche Fehlerverstärkung: $|8 - 393216| / (8\text{eps}) \approx 2.2 \cdot 10^{20}$

Eingabefehler und Auswertungsfehler: Gesamtfehler

Eingabefehler: $\frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$ max. Rundungsfehler: $\|\varepsilon\|$

resultierender Gesamtfehler: $\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$

Satz 7.5: Es sei $x_0 \neq 0$, $f(x_0) \neq 0$, g_i stetig differenzierbar und ε genügend klein. Dann gilt

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma_{\text{rel}} \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|).$$

σ_{rel} : Stabilität der Funktionsauswertung an der Stelle x_0 .

κ_{rel} : rel. Kondition der Auswertung von f an der Stelle x_0 .

Faustregel

Gesamtfehler = κ * Eingabefehler + σ * Auswertungsfehler!