Stabilitätsanalyse Vorlesung vom 1.12.17

Stabilität:

Motivation des Stabilitäts- und Algorithmusbegriffs. Abgrenzung zur Kondition.
Relative Stabilität von Algorithmen zur Funktionsauswertung.
Definition und Beispiele.

Gesamtfehlerabschätzungen:

Satz 7.5: Der Gesamtfehler lässt sich abschätzen durch die Summe von
Eingabefehler, verstärkt durch die Kondition, und
Auswertungsfehler, verstärkt durch die Stabilität.

Stabilitätsabschätzungen:

Kondition der Elementarfunktionen und Stabilität:
Grundrechenarten (Satz 7.9) und Elementarfunktionen (Satz 7.8). Beispiele.
Schlecht konditionierte Elementarfunktionen vermeiden!
Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementarfunktionen an den Anfang!
Das Polynom-Desaster in MATLAB: Grobe Stabilitätsanalyse.

Beispiel: Auswertung eines Polynoms mit Matlab

Berechne das Polynom $f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3$
mit $a = 4\,999\,999$ an der Stelle $x_0 = 10\,000\,000$.

```
>> a =  4999999;
>> x = 10000000;
>> f = x^3 + 12*a^2*x - 6*a*x^2 - 8*a^3

f =
    393216

>> f = (x-2*a)^3

f =
    8
```

Relative Stabilität: Auswirkung von Gleitkommarechnung

Bezeichnung: $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ gegeben. Wir setzen $\|\varepsilon\| = \max_{i=1,\ldots,n} |\varepsilon_i|$.

Definition 7.4: Die relative Stabilität σ_{rel} des Algorithmus'

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0) \neq 0$$

gegenüber Rundungsfehlern $\tilde{g}_i(y) = g_i(y)(1 + \varepsilon_i)$, $|\varepsilon_i| \leq eps$,
ist die kleinste Zahl σ_{rel} mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \sigma_{\mathrm{rel}} \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|) \; .$$

Liegt dies für keine reelle Zahl σ_{rel} vor, so wird $\sigma_{\mathrm{rel}} = \infty$ gesetzt.

Stabilitätsabschätzungen: Skalare Elementarfunktionen g_i

Satz 7.8: Es bezeichne κ_i die relative Kondition von g_i an der Stelle y_{i-1}, und es sei

$$f(x_0) = g_n \circ \cdots \circ g_1(x_0)\ , \qquad y_i = g_i(y_{i-1})\ , \quad i = 1, \ldots, n\ , \qquad y_0 = x_0\ .$$

Dann gilt

$$\sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1}^{n} \kappa_i \ = 1 + \kappa_n(1 + \kappa_{n-1}(1 + \ldots \kappa_3(1 + \kappa_2) \ldots))\ .$$

Schlecht konditionierte Elementarfunktionen verschlechtern die Stabilität!

Stabilitätsabschätzungen: Grundrechenarten

Satz 7.9: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0)$, $h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0) \ , \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h. Dann gilt jeweils

$$\begin{aligned}
f(x_0) = g(x_0) + h(x_0) \quad &: \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\} \ , \\
f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) \quad &: \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_g, \sigma_h\} \ , \\
f(x_0) = g(x_0) \cdot h(x_0) \quad &: \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\} \ , \\
f(x_0) = g(x_0) / h(x_0) \quad &: \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\} \ ,
\end{aligned}$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0)$, $h(x_0) > 0$ vorausgesetzt ist.

κ * **Eingabefehler** + σ * **Auswertungsfehler** = **Gesamtfehler**

Eingabefehler: $\dfrac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|}$ Auswertungsfehler: $\|\varepsilon\|$

resultierender Gesamtfehler: $\dfrac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|}$

Satz 7.5: Es sei $x_0 \neq 0$, $f(x_0) \neq 0$, g_i stetig differenzierbar und ε genügend klein. Dann gilt

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}} \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + \sigma_{\text{rel}}\|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) \; .$$

σ_{rel}: Stabilität der Funktionsauswertung an der Stelle x_0.

κ_{rel}: rel. Kondition der Auswertung von f an der Stelle x_0.

Polynomdesaster: Konditionsanalyse

$$f(x) = x^3 + 12a^2x - 6ax^2 - 8a^3 = (x-2a)^3$$

relative Kondition:

$$\kappa_{\text{rel}} = |f'(x_0)|\frac{|x_0|}{|f(x_0)|} = 3(x_0-2a)^2\frac{|x_0|}{|x_0-2a|^3} = \frac{3}{2}10^7$$

Polynomdesaster: Stabilitätsanalyse

Algorithmus 1:

$$f(x_0) = x_0^3 + 12a^2x_0 - 6ax_0^2 - 8a^3$$

$$= (x_0^3 + 12a^2x_0) - (6ax_0^2 + 8a^3) = g_1(x_0) - g_2(x_0)$$

$$g_1(x) = x^3 + 12a^2x \ , \qquad g_2(x_0) = 6ax^2 + 8a^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_g \leq \frac{|g_1(x_0)|+|g_2(x_0)|}{|g_1(x_0)-g_2(x_0)|} \approx 10^{21}$

Algorithmus 2:

$$f(x_0) = (x_0 - 2a)^3 = h_2 \circ h_1(x_0) \ , \qquad h_1(x_0) = x_0 - 2a \ , \quad h_2(y_1) = y_1^3$$

Stabilitätsschranke: $\sigma_h \leq 1 + \kappa_{h_2} = 1 + 3 = 4$

Gesamtfehler

Algorithmus 1:

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \tfrac{3}{2} 10^6 \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + 10^{21} \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) \, .$$

Algorithmus 2:

$$\frac{|f(x_0) - \tilde{f}(\varepsilon, \tilde{x}_0)|}{|f(x_0)|} \leq \tfrac{3}{2} 10^6 \frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{|x_0|} + 4 \|\varepsilon\| + o(|x_0 - \tilde{x}_0| + \|\varepsilon\|) \, .$$

kein Eingabefehler: $x_0 = \tilde{x}_0 = 2$

Komplizierte Algorithmen

Systematische Stabilitätsanalyse

Beispiel

Problem: $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 = (x_1^2 - 2(x_1 x_2)) + x_2^2$

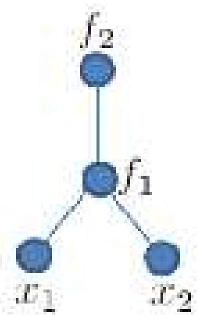
Algorithmus 1: $f(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$

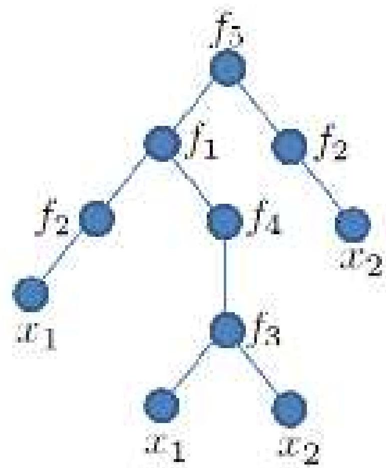
$$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2$$

Algorithmus 2: $f(x_1, x_2) = f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big)$

$$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

Auswertungsbäume



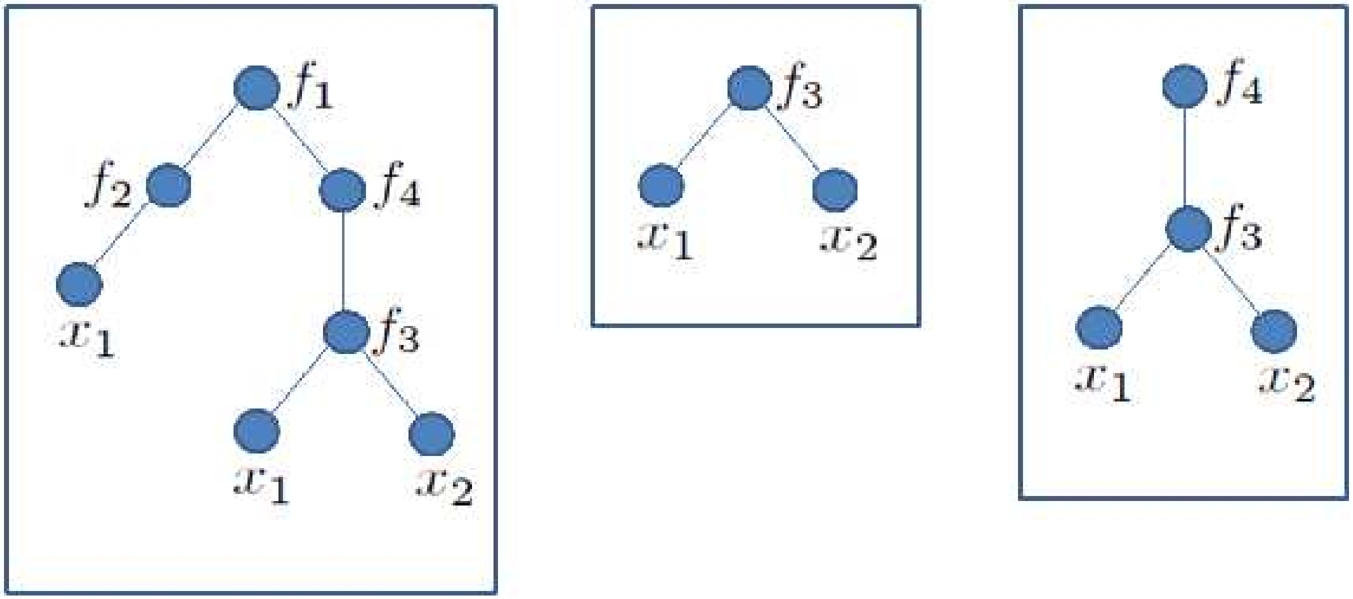


Algorithmus 1: $\quad f(x_1, x_2) = \quad f_2(f_1(x_1, x_2)), \quad f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2$

Algorithmus 2: $\quad f(x_1, x_2) = \quad f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big),$

$$f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$$

Teilbäume



Zerlegung von Auswertungsbäumen in Teilbäume

Auswertungsbaum: gerichteter Graph β (Knoten, gerichtete Kanten)

Anzahl der Knoten: $\#\beta$

Wurzel: nur eingehende Kanten, Blätter: nur ausgehende Kante

Teilbäume β_i entstehen Wegnahme der zur Wurzel führenden Kanten

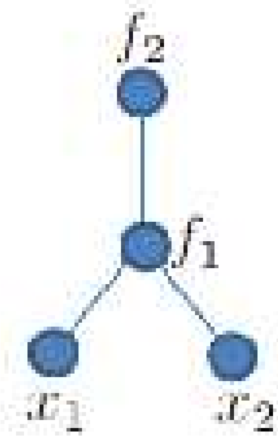
Zerlegung in Teilbäume: $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m]$, (bei uns immer $m \in \{1, 2\}$)

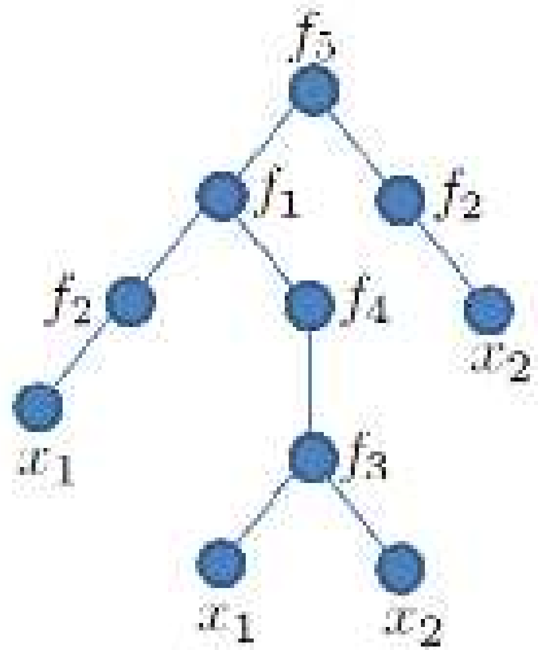
Gesamtzahl von Knoten: $\#\beta = 1 + \#\beta_1 + \ldots + \#\beta_m$

trivialer Baum: nur einen Knoten (seine Wurzel):

$$\beta = [\,], \quad \text{mit} \quad \#\beta = 1.$$

Algorithmus 1:

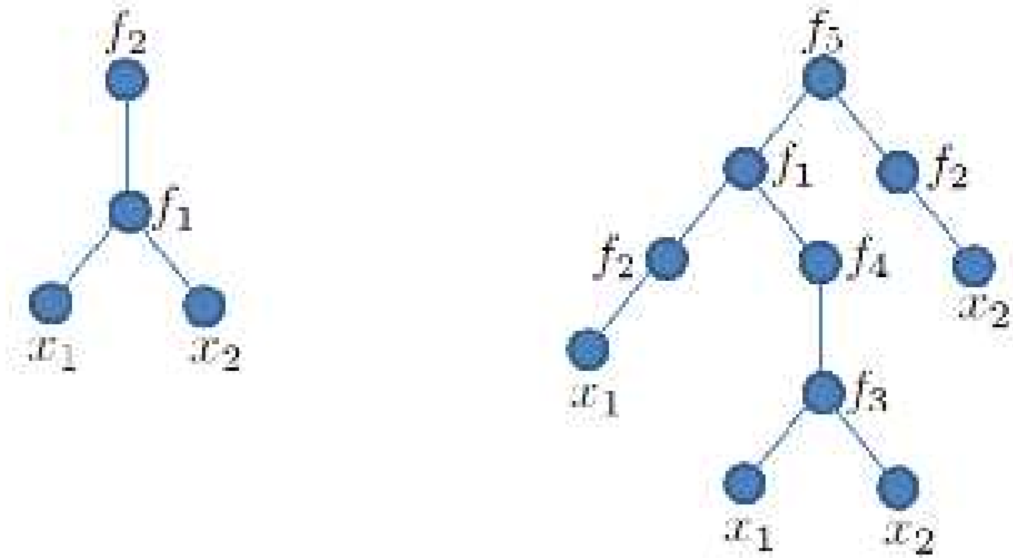




$$\beta_{F_1} \quad = \quad [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$$

Die Blätter $\quad \beta_{0,1} = \beta_{0,2} = [\ ]$ stehen für Eingabewerten x_k in $\beta_{0,k}$, $k = 1, 2$.

Algorithmus 2:



$$
\begin{aligned}
\beta_{F_2} &= [\beta_{11}, \beta_{12}] \\
\beta_{11} &= [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}] \\
\beta_{21} &= [\beta_{31}], \quad \beta_{22} = [\beta_{32}], \quad \beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}]
\end{aligned}
$$

Blätter $\beta_{31} = [\,]$, $\beta_{41} = [\,]$ und $\beta_{23} = [\,]$, $\beta_{42} = [\,]$ stehen für Eingaben x_1 und x_2.

Zwischenergebnisse mittels Auswertungsbäumen

Zuordnung von Elementarfunktionen und Eingabedaten:

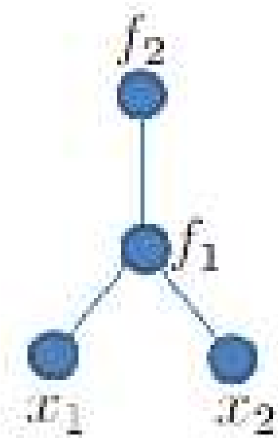
Eingabewert $\leftrightarrow$ Blatt   Elementarfunktion $\leftrightarrow$ Knoten

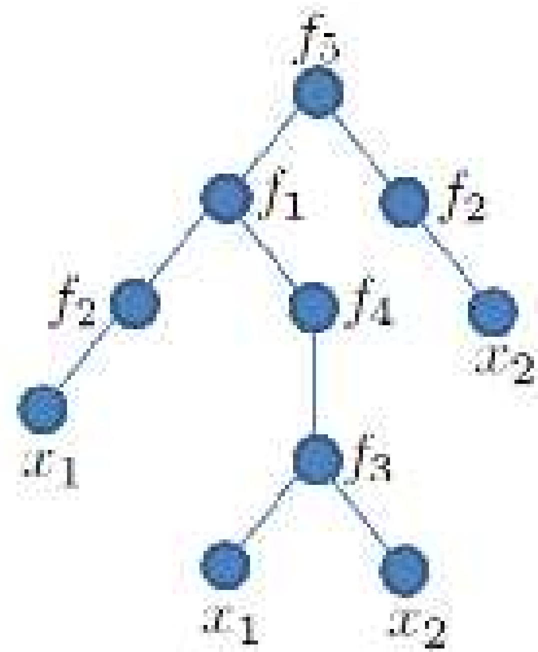
Zwischenergebnisse für jeden Teilbaum β:

Wurzel: Zwischenfunktion f^β Zwischenergebnis: z^β

$$z^\beta = \begin{cases} \text{Eingabewert} & \text{falls} \quad \#\beta = 1 \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \dots, z^{\beta_m}) & \text{falls} \quad \#\beta = m + 1 > 1,\ \beta = [\beta_1, \dots, \beta_m] \end{cases}$$

Algorithmus 1:

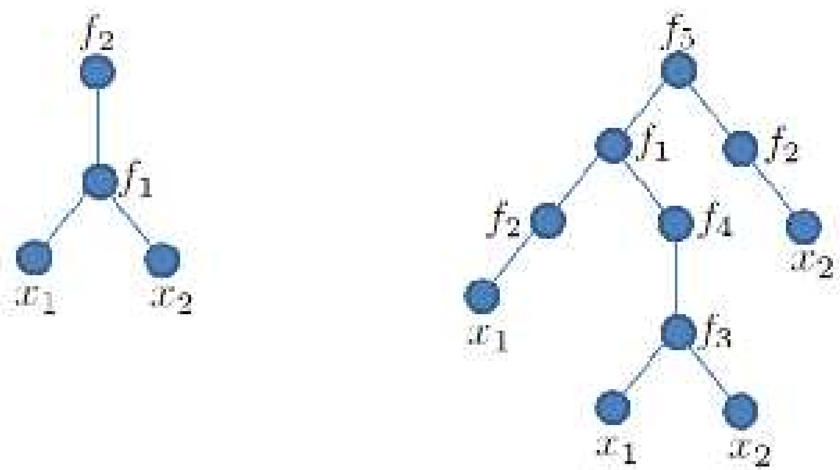




$$\beta_{F_1} \quad = \quad [\beta_1], \quad \beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}]$$

Die Blätter $\beta_{21} = \beta_{22} = [\,]$ stehen für Eingabewerten x_k in β_{2k}, $k = 1, 2$.

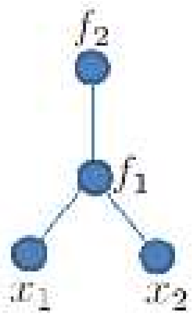
Algorithmus 1:

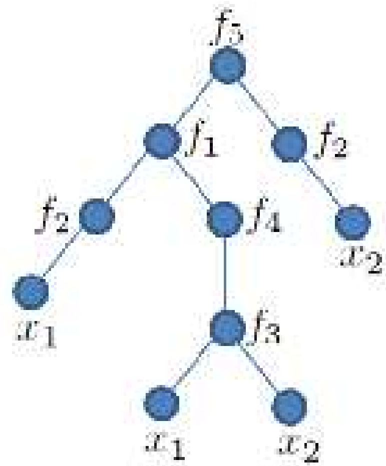


$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad f^{\beta_{F_1}} = f_2, \quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1})$

$\beta_1 = [\beta_{21}, \beta_{22}]$: $\quad z^{\beta_{21}} = x_1, \; z^{\beta_{22}} = x_2, \quad f^{\beta_1} = f_1, \; z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}})$

Algorithmus 2:

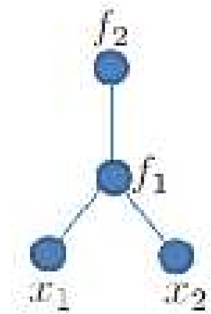


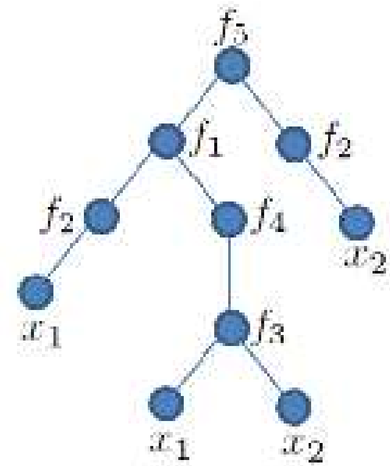


$$
\begin{aligned}
\beta_{F_2} &= [\beta_{11}, \beta_{12}] \\
\beta_{11} &= [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}] \\
\beta_{21} &= [\beta_{31}], \quad \beta_{22} = [\beta_{32}], \quad \beta_{32} = [\beta_{41}, \beta_{42}]
\end{aligned}
$$

Blätter $\beta_{31} = [\ ]$, $\beta_{41} = [\ ]$ und $\beta_{23} = [\ ]$, $\beta_{42} = [\ ]$ stehen für Eingaben x_1 und x_2.

Algorithmus 2:





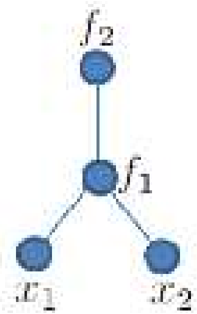
$$\beta_{F_2} = [\beta_{11}, \beta_{12}]$$

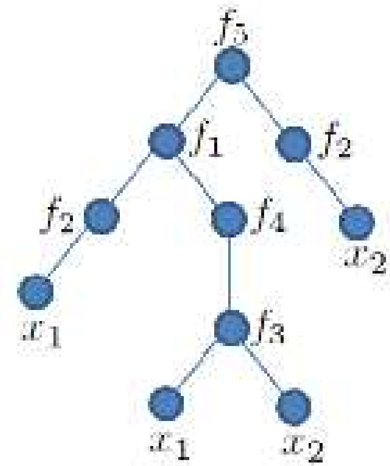
$$\beta_{11} = [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}]$$

$$\beta_{21} = [\beta_{31}], \quad \beta_{22} = [\beta_{32}], \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)$$

Blätter $\beta_{31} = [\ ]$, $\beta_{41} = [\ ]$ und $\beta_{23} = [\ ]$, $\beta_{42} = [\ ]$ stehen für Eingaben x_1 und x_2.

Algorithmus 2:

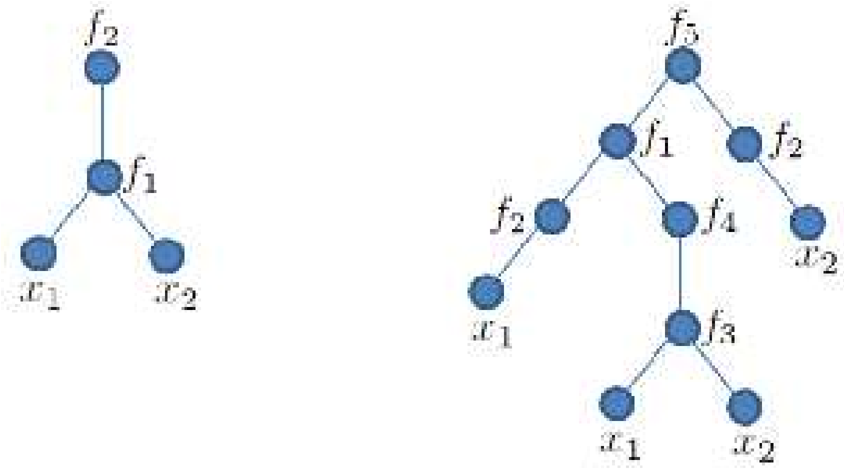




$$
\begin{aligned}
\beta_{F_2} &= [\beta_{11}, \beta_{12}] \\
\beta_{11} &= [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}] \\
\beta_{21} &= [\beta_{31}], \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Blätter $\beta_{31} = [\ ]$, $\beta_{41} = [\ ]$ und $\beta_{23} = [\ ]$, $\beta_{42} = [\ ]$ stehen für Eingaben x_1 und x_2.

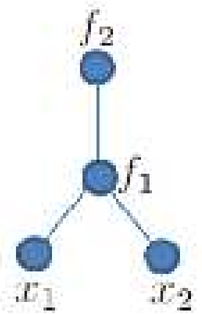
Algorithmus 2:

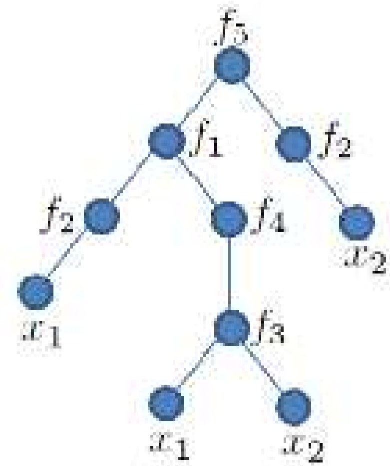


$$\begin{aligned} \beta_{F_2} &= [\beta_{11}, \beta_{12}] \\ \beta_{11} &= [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad \beta_{12} = [\beta_{23}] \\ z^{\beta 21} &= f_2(x_1), \quad z^{\beta 22} = f_4(z^{\beta 32}), \quad z^{\beta 32} = f_3(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Blätter $\beta_{31} = [\,]$, $\beta_{41} = [\,]$ und $\beta_{23} = [\,]$, $\beta_{42} = [\,]$ stehen für Eingaben x_1 und x_2.

Algorithmus 2:

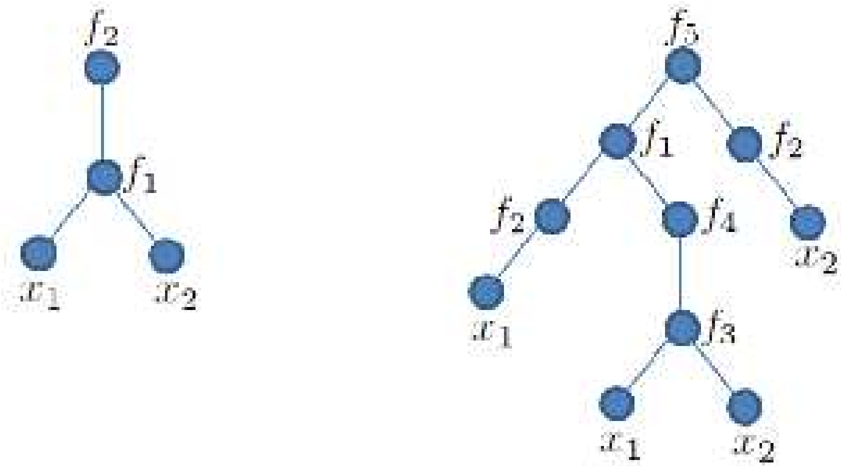




$$
\begin{aligned}
\beta_{F_2} &= [\beta_{11}, \beta_{12}] \\
\beta_{11} &= [\beta_{21}, \beta_{22}], \quad z^{\beta_{12}} = f_2(x_2) \\
z^{\beta_{21}} &= f_2(x_1), \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Blätter $\beta_{31} = [\ ]$, $\beta_{41} = [\ ]$ und $\beta_{23} = [\ ]$, $\beta_{42} = [\ ]$ stehen für Eingaben x_1 und x_2.

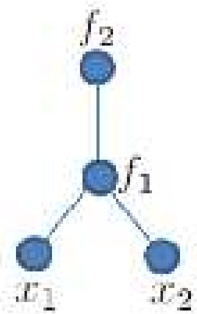
Algorithmus 2:

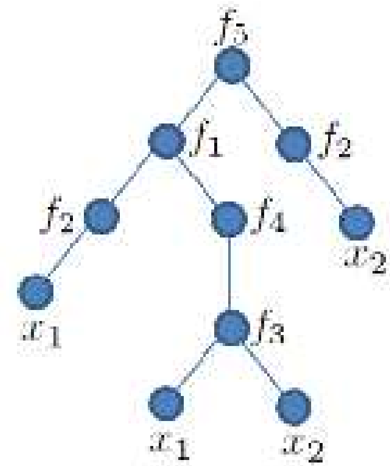


$$\begin{aligned} \beta_{F_2} &= [\beta_{11}, \beta_{12}] \\ z^{\beta_{11}} &= f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}}), \quad z^{\beta_{12}} = f_2(x_2) \\ z^{\beta_{21}} &= f_2(x_1), \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Blätter $\beta_{31} = [\,]$, $\beta_{41} = [\,]$ und $\beta_{23} = [\,]$, $\beta_{42} = [\,]$ stehen für Eingaben x_1 und x_2.

Algorithmus 2:



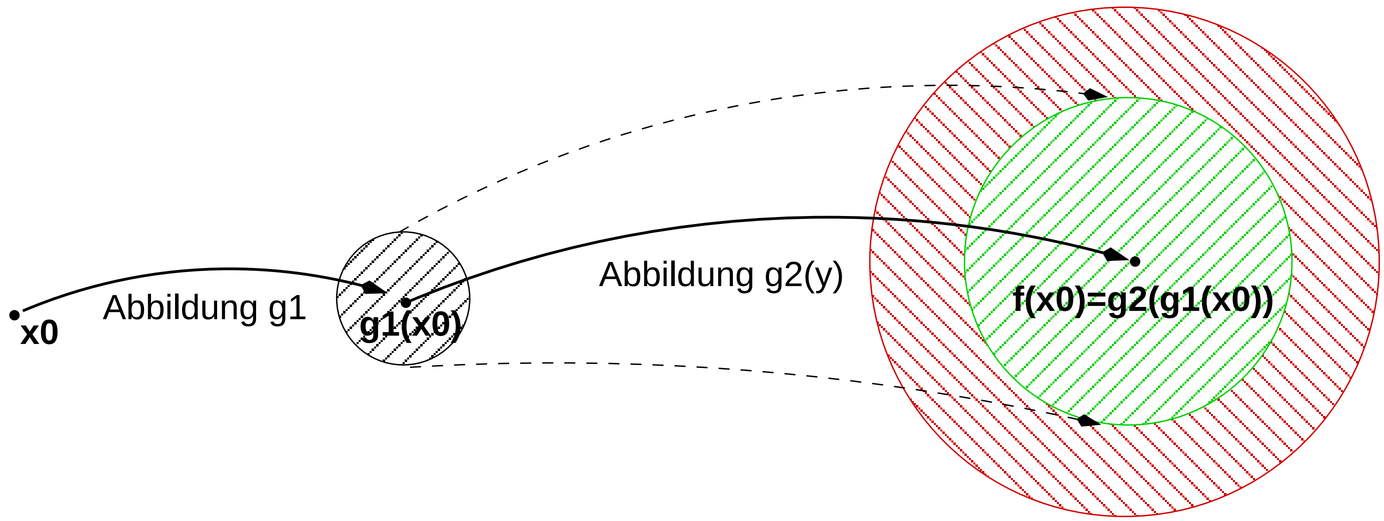


$$
\begin{aligned}
z^{\beta_{F_2}} &= f_5(z^{\beta_{11}}, z^{\beta_{12}}) \\
z^{\beta_{11}} &= f_1(z^{\beta_{21}}, z^{\beta_{22}}), \quad z^{\beta_{12}} = f_2(x_2) \\
z^{\beta_{21}} &= f_2(x_1), \quad z^{\beta_{22}} = f_4(z^{\beta_{32}}), \quad z^{\beta_{32}} = f_3(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Blätter $\beta_{31} = [\,]$, $\beta_{41} = [\,]$ und $\beta_{23} = [\,]$, $\beta_{42} = [\,]$ stehen für Eingaben x_1 und x_2.

Rekursive Stabilitätsabschätzung

Auswirkung von Störungen der Elementarfunktionen auf das Ergebnis:



Rekursive Stabilitätsabschätzung

Satz 7.6: $h: I \mapsto I_g \subset \mathbb{R}$, $g: I_g \mapsto \mathbb{R}$, $f = g \circ h: I \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Algorithmus zur Auswertung von $h(x_0)$ mit Stabilität σ_h

$$h(x_0) = h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmus zur Auswertung von $f(x_0) = g(h(x_0))$

$$f(x_0) = g \circ h_n \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Die Kondition von $g(y_0)$, $y_0 = h(x_0)$, ist κ_g.

Stabilitätsschranke: $\sigma_f \leq 1 + \kappa_g \sigma_h$

Stabilitätsabschätzungen: Grundrechenarten

Satz 7.9: Es sei $f(x_0) \neq 0$ sowie $g(x_0)$, $h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_1(x_0)\ , \quad h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \cdots \circ h_1(x_0)$$

Algorithmen zur Auswertung von $g(x_0)$ und $h(x_0)$ mit der relativen Stabilität σ_g, σ_h. Dann gilt jeweils

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= g(x_0) + h(x_0) &:& \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,\\
f(x_0) &= g(x_0) - h(x_0) &:& \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,\\
f(x_0) &= g(x_0) \cdot h(x_0) &:& \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2\max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,\\
f(x_0) &= g(x_0) / h(x_0) &:& \quad \sigma_{\text{rel}} \leq 1 + 2\max\{\sigma_g, \sigma_h\}\ ,
\end{aligned}$$

wobei in den ersten beiden Fällen $g(x_0)$, $h(x_0) > 0$ vorausgesetzt ist.

Rekursive Abschätzung der Fehlerverstärkung

Zwischenergebnisse:

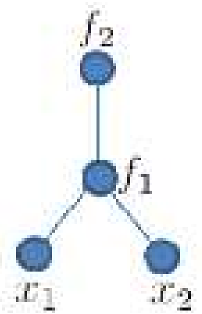
$$z^\beta = \begin{cases} \text{Eingabewert} & \text{falls} \quad \#\beta = 1 \\ f^\beta(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}) & \text{falls} \quad \#\beta = m + 1 > 1,\ \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m] \end{cases}$$

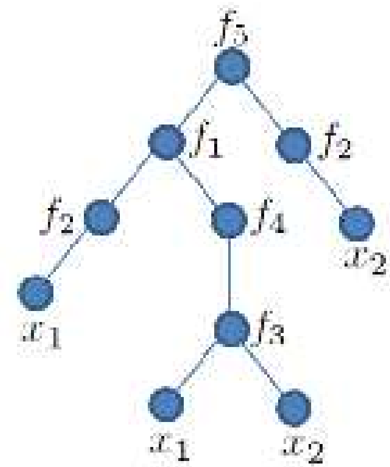
Fehlerverstärkung für Teilbaum:

$$\sigma^\beta \leq \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \#\beta = 1 \\ 1 + \kappa(f^\beta) \max(\sigma^{\beta_1}, \ldots, \sigma^{\beta_m}) & \text{falls} \quad \#\beta = m + 1 > 1, \\ & \text{und} \quad \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m] \end{cases}$$

$\kappa(f^\beta)$: relative Kondition der Auswertung von f^β in $z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_m}$

Algorithmus 1:



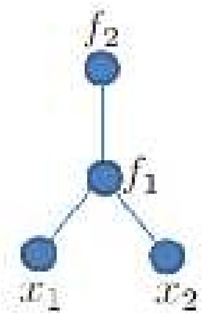


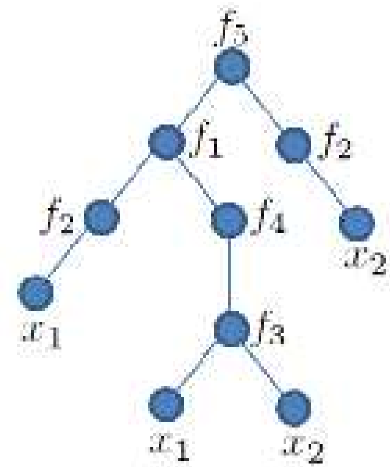
$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1})$,

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}})$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Algorithmus 1:



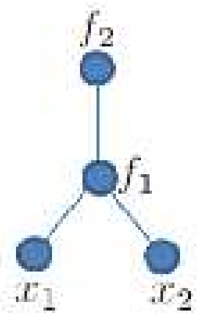


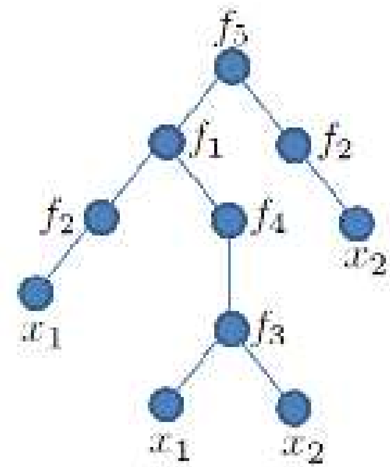
$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1})$,

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma^{\beta_1} = 1$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Algorithmus 1:



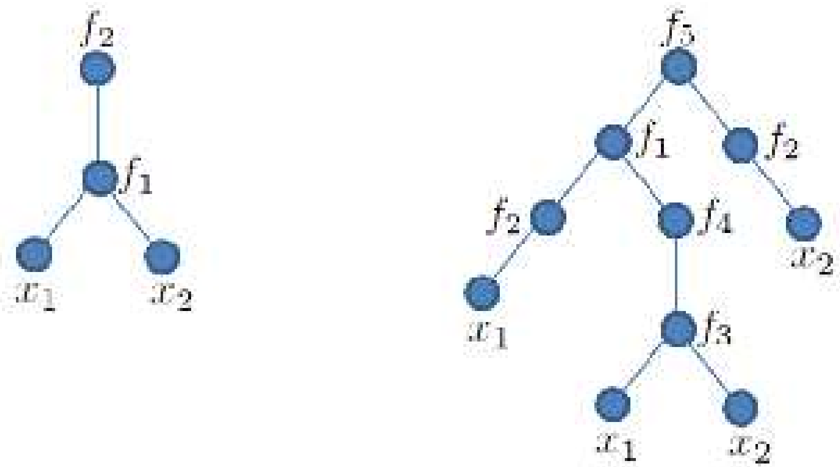


$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma^{\beta_1} = 1$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Algorithmus 1:



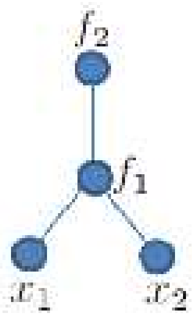
$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$

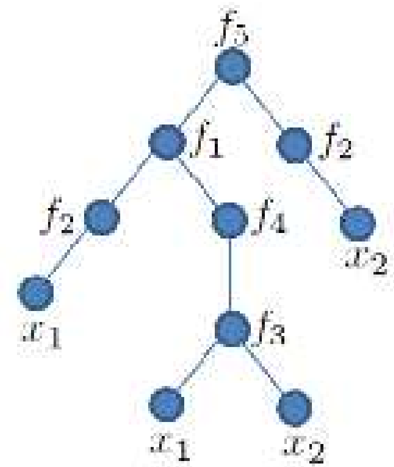
$$\kappa_2 = \frac{|f_2'(z^{\beta_1})||z^{\beta_1}|}{|f_2(z^{\beta_1})|} = 2$$

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma^{\beta_1} = 1$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Algorithmus 1:





$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$$

$$\kappa_2 = \frac{|f_2'(z^{\beta_1})||z^{\beta_1}|}{|f_2(z^{\beta_1})|} = 2 \qquad \sigma^{F_1} = 1 + \kappa_2 \sigma^{\beta_1} = 3$$

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $$z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma^{\beta_1} = 1$$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Gesamtfehlerverstärkung

Satz 7.5: Gesamtfehler$= \kappa * $ Eingabefehler $+ \sigma *$ Auswertungsfehler

Gesamtfehlerverstärkung

Satz 7.5: Gesamtfehler$= \kappa * $ Eingabefehler $+ \sigma *$ Auswertungsfehler

relative Kondition der Auswertung von: $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

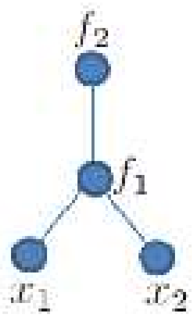
Gesamtfehlerverstärkung

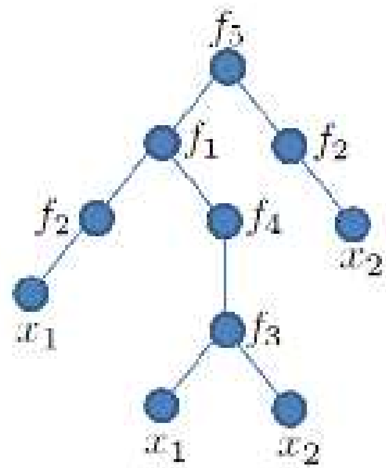
Satz 7.5: Gesamtfehler$=\kappa *$ Eingabefehler $+\ \sigma *$ Auswertungsfehler

relative Kondition der Auswertung von: $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2$

Funktion mit mehr als einer Variablen

Direkter Weg: Algorithmus 1:



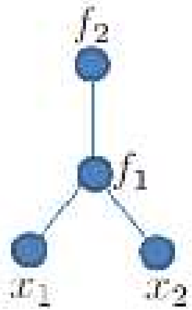


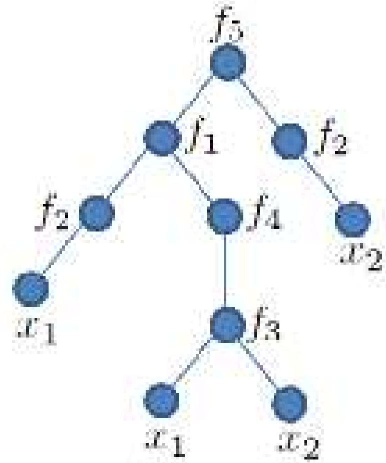
$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\qquad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1})$,

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}})$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Direkter Weg: Algorithmus 1:



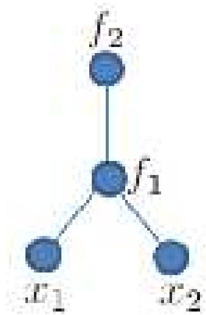


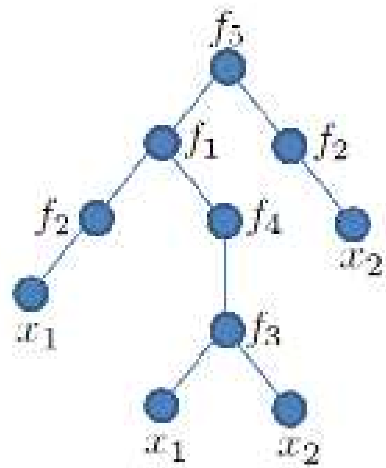
$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1})$,

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + \frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1-x_2|} = 10^{11}$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Direkter Weg: Algorithmus 1:



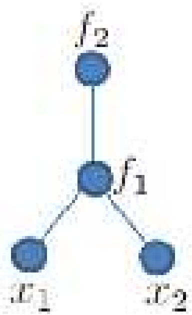


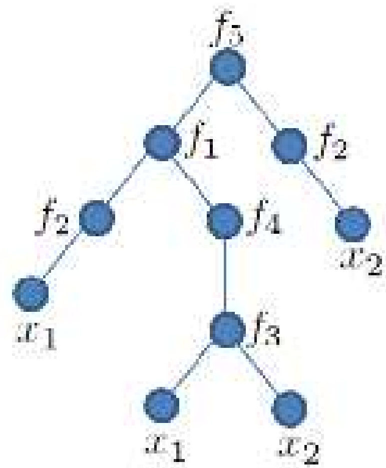
$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + \frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1-x_2|} = 10^{11}$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Direkter Weg: Algorithmus 1:





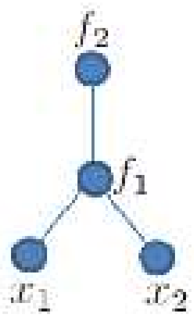
$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $$z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$$

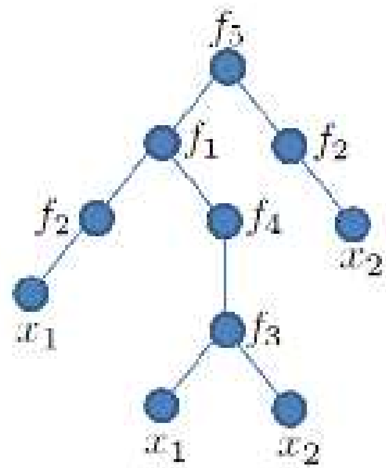
$$\kappa_2 = \frac{|f_2'(z^{\beta_1})||z^{\beta_1}|}{|f_2(z^{\beta_1})|} = 2$$

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + \frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1-x_2|} = 10^{11}$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

Direkter Weg: Algorithmus 1:





$\beta_{F_1} = [\beta_1]$: $\quad z^{\beta_{F_1}} = f_2(z^{\beta_1}) = (z^{\beta_1})^2 = 1,$

$$\kappa_2 = \frac{|f_2'(z^{\beta_1})||z^{\beta_1}|}{|f_2(z^{\beta_1})|} = 2 \qquad \sigma_{ges}^{F_1} = 1 + \kappa_2 \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + 3 \cdot 10^{11}$$

$\beta_1 = [\beta_{0,1}, \beta_{0,2}]$: $\quad z^{\beta_1} = f_1(z^{\beta_{0,1}}, z^{\beta_{0,2}}) = x_1 - x_2 = 1 \quad \sigma_{ges}^{\beta_1} = 1 + \frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1 - x_2|} = 10^{11}$

$$z^{\beta_{0,1}} = x_1 = 10^{11}, \quad z^{\beta_{0,2}} = x_2 = 10^{11} - 1$$

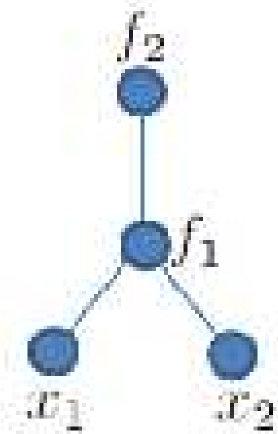
Kompliziertere Algorithmen

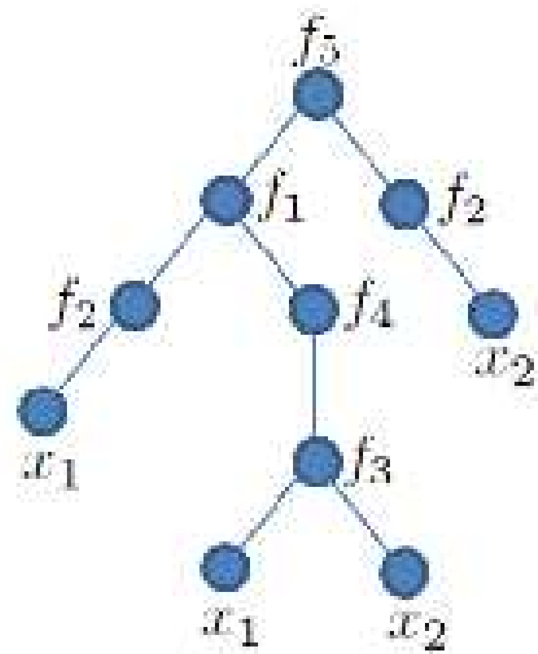
Systematische Analyse des Gesamtfehlers

kann der Computer übernehmen!

Automatische Fehleranalyse

Eingabedaten $x_1, \ldots, x_n$, Elementarfunktionen g_i, Ableitungen g_i'





Vergleich von Algorithmus 1 und 2

Algorithmus 1: $F_1(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

$$F_1(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1, x_2))$$

Algorithmus 2: $F_1(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2(x_1 x_2)) + x_2^2$

$$F_2(x_1, x_2) = f_5\Big(f_1\Big(f_2(x_1), f_4(f_3(x_1, x_2))\Big), f_2(x_2)\Big)$$

$f_1(x, y) = x - y, \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x, y) = xy, \quad f_4(x) = 2x, \quad f_5(x, y) = x + y$

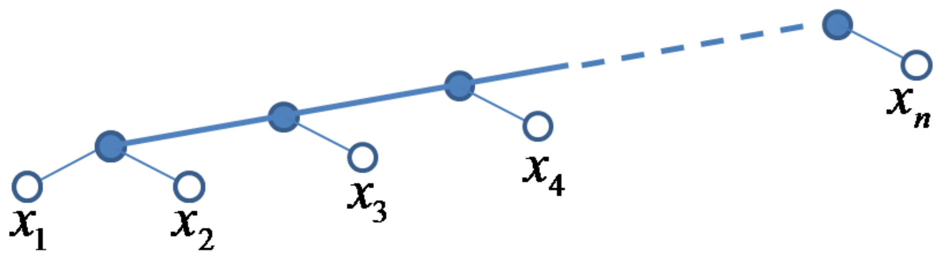
Gesamtfehlerverstärkung:

$$\sigma^{F_1} \leq 1 + 4 \cdot 10^{11} \qquad \sigma^{F_2} \leq 44 \cdot 10^{22}$$

Auswertung der Summe positiver Zahlen

$$S = a_1 + a_2 + \cdots a_n, \quad a_k > 0$$

Rekursive Summation: `S = a[1]; for i=2:1:m S = S + a[i]; end`



Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_{i+1}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i}, 1\} = 1 + \sigma^{\beta_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad \sigma^{\beta_1} = 1$$

Fehlerverstärkung bei rekursiver Summation: $\sigma_{Rek} \leq n$

Hierarchische Summation

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
x_1 \arrow[dr] & & x_2 \arrow[dl] & & x_3 \arrow[dr] & & x_4 \arrow[dl] & & x_5 \arrow[dr] & & x_6 \arrow[dl] & & x_7 \arrow[dr] & & x_8 \arrow[dl] \\
& s_1^{(1)} \arrow[drr] & & & & s_2^{(1)} \arrow[dll] & & & & s_3^{(1)} \arrow[drr] & & & & s_4^{(1)} \arrow[dll] & \\
& & & s_1^{(2)} \arrow[drrrr] & & & & & & & & s_2^{(2)} \arrow[dllll] & & & \\
& & & & & & & s_1^{(3)} & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Rekursive Stabilitätsanalyse

$$\sigma^{\beta_i^{(k+1)}} \leq 1 + \max\{\sigma^{\beta_i^{(k)}}, \sigma^{\beta_{i+1}^{(k)}}\}, \quad k = 1, \ldots, \log_2(n), \qquad \sigma^{\beta_i^{(0)}} = 1$$

Fehlerverstärkung bei hierarchischer Summation: $\sigma_{Rek} \leq \log_2(n)$

Numerisches Beispiel

Genauigkeit: $\ell = 7$ Dezimalstellen

Problem: Summation von $n_j = 2^J$ Zufallszahlen $a_k \in (0,1)$, $\quad J = 1, \ldots, 15$