

# Aufwand und Komplexität

Vorlesung vom 15.12.17

## Komplexität und Effizienz

Aufwand: Anzahl dominanter Operationen (worst-case). Beispiel.

Landau-Symbol  $O(n)$ . Beispiel.

Definition: Aufwand eines Algorithmus. Komplexität eines Problems.

## Summation

Aufwand: rekursive und hierarchische Summation. Komplexität.

## Sortieren

Aufwand: TumbSort, BubbleSort und MergeSort. Komplexität.

## Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von $a \geq b$ :

Naiver Algorithmus (Ausprobieren): Aufwand:  $O(b)$  Divisionen.

Variante (Ausprobieren rückwärts): Aufwand:  $O(b)$  Divisionen (worst-case!).

*Strukturelle Einsicht:* Kongruenzen (Gauß 1801), Rekursionsatz.

Euklidischer Algorithmus: Aufwand:  $O(\log(b))$  Divisionen.

# Numerische Mathematik und Scientific Computing

**Problem:** Eingabedaten und Komplexität

**Kondition:** Wie wirken sich Eingabefehler aus?

**Algorithmus:** Auswertungsfehler und Aufwand

**Stabilität:** Wie wirken sich Auswertungsfehler in meinem Algorithmus aus?

**Aufwand:** Wie aufwendig ist mein Algorithmus?

# Lineare Gleichungssysteme

$n = 3$  lineare Gleichungen für  $n = 3$  Unbekannte:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \quad x = b$

# Matrix-Vektor- und Matrixprodukt

## Matrix-Vektor-Produkt:

Matrix  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ , Vektor  $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = ((Ax)_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n, \quad (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

## Matrixprodukt:

Matrizen  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n, B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$AB = ((AB)_{ij})_{ij=1}^n, \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

# Woher kommen lineare Gleichungssysteme?

Mathematische Modellierung:

diskrete stationäre Prozesse

Diskretisierung:

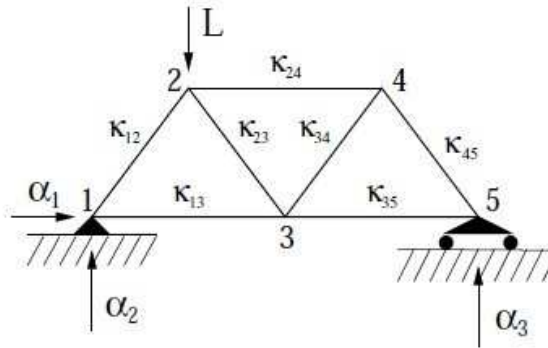
mathematische Modelle kontinuierlicher Prozesse:

gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, . . .

Linearisierung (Newton-Verfahren, . . . )

## Beispiel: Lineares Stabwerk

Brückenkonstruktion



gegeben: Knoten  $P_i$ , Last  $L$

gesucht: Stabkräfte  $k_{ij}$ , Auflagekräfte  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

mathematische Modellierung:

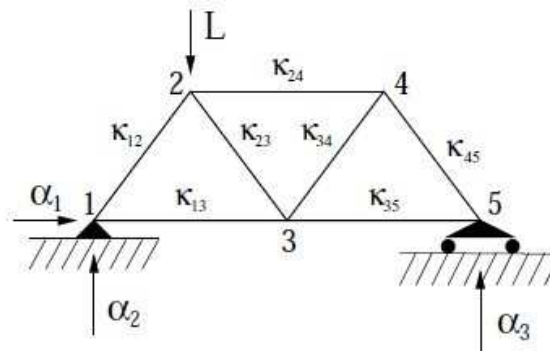
starre Stäbe  $S_{ij} = P_i - P_j$ , reibungsfreie Verbindung in den Knoten  $P_i$

Kräftegleichgewicht:

$$P_1: \quad k_{12}S_{12}^* + k_{13}S_{13}^* + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\|S_{ij}\|_2}$$

## Beispiel: Lineares Stabwerk

Brückenkonstruktion



gegeben: Knoten  $P_i$ , Last  $L$

gesucht: Stabkräfte  $k_{ij}$ , Auflagekräfte  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

mathematische Modellierung:  $n = 3M$  Gleichungen für  $M$  Knoten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{kurz: } Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad b \in \mathbb{R}^n$$

# Kondition, Stabilität und Effizienz

## Problem:

Berechne  $x \in \mathbb{R}^n$  aus  $Ax = b$  zu gegebenen Daten  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$

Auswirkung von Eingabefehlern  $\tilde{A} \approx A$ ,  $\tilde{b} \approx b$  (Kondition)

## Algorithmus: Gaußscher Algorithmus

Auswirkung von Auswertungsfehlern (Stabilität)

Aufwand und mögliche Aufwandsreduktion (Effizienz)



## Kondition: Auswertung des Lösungsoperators

**Lemma:** Ist  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  regulär, so existiert die Inverse  $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

**Problem:**

Auswertung von  $f(A, b) = A^{-1}b = x \in \mathbb{R}^n$  für  $(A, b) \in \mathbb{R}^{n,m} \times \mathbb{R}^n$

**Schwierigkeiten:**

- Wie misst man den von  $\tilde{A} \approx A$  und  $\tilde{b} \approx b$ ?
- Wie berechnet man den maximalen Verstärkungsfaktor?

# Linearer Raum (Vektorraum)

**Definition:** Auf der Menge  $V$  seien

Addition  $a + b : V \times V \rightarrow V$ , Multiplikation mit Skalaren  $\alpha a : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$

erklärt und haben folgende Eigenschaften

$V$  ist Abelsche Gruppe (Assoziativität, Nullelement, negatives Element, Kommutativität)

Addition und Multiplikation sind verträglich, d.h. für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \in V$  gilt

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \quad (\text{Assoziativität})$$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b \quad (\text{Distributivität})$$

$$1 \cdot a = a$$

Dann heißt  $V$  **linearer Raum (Vektorraum) über  $\mathbb{R}$** .

# Abstraktion des Längenbegriffs: Normen

**Definition 8.1** Es sei  $V$  ein linearer Raum über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **Norm**, falls für alle  $x, y \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad (1)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\text{Homogenität}), \quad (2)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}). \quad (3)$$

Das Paar  $(V, \| \cdot \|)$  heißt **normierter Raum**.

## Beispiele: Vektornormen

$$x = (x_i)_{i=1}^n \in V = \mathbb{R}^n$$

Euklidische Norm:

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

$p$ -Norm:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Maximumsnorm ( $\infty$ -Norm):  $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$

## Matrixnormen

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in V = \mathbb{R}^{n,n}$  , Matrizen mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten

jede Vektornorm auf  $\mathbb{R}^{n^2}$  induziert eine Matrixnorm auf  $\mathbb{R}^{n,n}$   
(interpretiere  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  als Vektor im  $\mathbb{R}^{n^2}$ )

Verträglichkeit der Matrixnorm  $\|\cdot\|_M$  mit Matrix–Vektor–Multiplikation:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$$

Obere Schranke für die Längenänderung durch Multiplikation mit  $A$ .

## Die von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm

**Definition 8.8** Es sei  $\|\cdot\|$  eine Vektornorm auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist durch

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n},$$

die **zugehörige Matrixnorm**  $\|\cdot\|_M$  definiert.

**Bemerkung:** Für zugehörige Matrixnormen gilt

- $\|\cdot\|_M$  ist eine Norm.
- $\|Ax\| \leq \|A\|_M \|x\|$
- $\|AB\|_M \leq \|A\|_M \|B\|_M \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n},$  (Submultiplikativität)
- Die Norm der Einheitsmatrix  $I$  ist  $\|I\|_M = 1$ .

# Die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm

**Satz 8.10** (Zeilensummennorm) Die Matrixnorm

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n},$$

gehört zur Maximumsnorm  $\|\cdot\|_{\infty}$  auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung:**

Es sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Vektornorm und  $\|\cdot\|_M$  die zugehörige Matrixnorm. Dann existiert ein  $x^* \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x^*\| = 1$  und  $\|Ax^*\| = \|A\|_M$ .

## Konvergenz in normierten Räumen

**Definition 8.4** Es sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $(x^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset V$  eine Folge. Die Folge heißt **konvergent** gegen  $x \in V$ , also

$$x^{(\nu)} \rightarrow x, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

falls

$$\|x - x^{(\nu)}\| \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty.$$

**Beispiel:**  $V = \mathbb{R}^n$ , Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$

$$(x^{(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \iff x_i^{(\nu)} \rightarrow x_i, \quad i = 1, \dots, n$$



## Äquivalenz von Normen auf endl.-dim. Räumen

**Satz 8.5** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler linearer Raum und  $\|\cdot\|$  und  $|||\cdot|||$  Normen auf  $V$ . Dann existieren  $c, C \in \mathbb{R}$ , so daß

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \quad \forall x \in V .$$

Beweis:

Satz von Heine-Borel: Kompaktheit der Einheitskugel in endl-dim. Räumen.

**Folgerungen:**  $V = \mathbb{R}^n$  mit beliebiger Norm  $\|\cdot\|$  und  $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\infty$

$$x^{(\nu)} \rightarrow x \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x^{(\nu)} - x\|_\infty \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_i^{(\nu)} \rightarrow x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{C \|Ax\|_\infty}{c \|x\|_\infty} = \frac{C}{c} \|A\|_\infty < \infty$$