

4. Übung zur Vorlesung
COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WiSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2017/CoMaI.php

Abgabe: Donnerstag, 30. November 2017, 14:00 Uhr

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.

1. Aufgabe (2 Bonus TP)

Berechnen Sie die absolute Kondition der Auswertung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x - 2)^2$$

an der Stelle $x_0 = 4$.

2. Aufgabe (8 TP)

- a) Es seien Funktionen $f(x) = o(x)$ und $g(x) = o(x)$ für $x \rightarrow 0$ gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$f(x) + g(x) = o(x) \quad f(x)/g(x) = o(x) \quad f(x)g(x) = o(x).$$

- b) Beweisen Sie für x , $\text{rd}(x) \neq 0$ die Beziehung

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} = \frac{|\text{rd}(x) - x|}{|\text{rd}(x)|} + o(\textit{eps}),$$

wobei *eps* die Maschinengenauigkeit bezeichnet.

3. Aufgabe (8 TP)

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\varepsilon \in (0, 1)$.

- a) Sei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\delta_x := \frac{\tilde{x} - x}{x}$, $\delta_y := \frac{\tilde{y} - y}{y}$. Es gelte

$$\max\{|\delta_x|, |\delta_y|\} \leq \varepsilon.$$

Zeigen Sie für den relativen Fehler der Division die Abschätzung

$$\frac{|x/y - \tilde{x}/\tilde{y}|}{|x/y|} \leq \left| \frac{\delta_y - \delta_x}{1 + \delta_y} \right|.$$

- b) Seien nun für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ Werte $\tilde{x}(\varepsilon), \tilde{y}(\varepsilon) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit vorzeichenbehafteten relativen Fehlern $\delta_x(\varepsilon)$ bzw. $\delta_y(\varepsilon)$ gegeben, sodass jeweils $\max\{|\delta_x(\varepsilon)|, |\delta_y(\varepsilon)|\} \leq \varepsilon$ gilt. Beweisen Sie

$$\frac{|x/y - \tilde{x}(\varepsilon)/\tilde{y}(\varepsilon)|}{|x/y|} \leq 2\varepsilon + o(\varepsilon) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

- c) Beweisen Sie, dass im Allgemeinen kein $c < 2$ existiert, sodass

$$\frac{|x/y - \tilde{x}(\varepsilon)/\tilde{y}(\varepsilon)|}{|x/y|} \leq c\varepsilon + o(\varepsilon) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$