

5. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WiSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2017/CoMaI.php

Abgabe: Donnerstag, 7. Dezember 2017, 14:00 Uhr

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.

1. Aufgabe (4 TP)

Finden Sie eine stückweise stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und vier verschiedene Werte $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ in der Weise, dass hinsichtlich der Kondition der Funktionsauswertung an der jeweiligen Stelle jede der folgenden vier Möglichkeiten einmal auftritt:

- a) κ_{abs} groß, κ_{rel} klein
- b) κ_{abs} klein, κ_{rel} groß
- c) κ_{abs} groß, κ_{rel} groß
- d) κ_{abs} klein, κ_{rel} klein

Geben Sie κ_{rel} und κ_{abs} Ihrer Funktion an den vier Stellen explizit an.

Wenn Sie eine Funktion finden, die nicht abschnittsweise definiert werden muss, erhalten Sie einen Zusatzpunkt.

2. Aufgabe (6 TP)

Seien $b, c \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowie

$$f_1(x) = x^3 - c \quad f_2(x) = mx + b.$$

- a) Berechnen Sie zu f_i jeweils die absolute Kondition κ_{abs} des Problems der Nullstellenbestimmung von f_i bei Störung von c beziehungsweise m .
- b) Für welche c bzw. m ist κ_{abs} klein? Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis anhand zweier Grafiken.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, welche der beteiligten Unbekannten x, c, m, b die Eingabegröße für die jeweilige Konditionsberechnung ist.

3. Aufgabe (6 TP)

- a) Seien $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Funktionen und sei $f := g + h$. Zeigen Sie, dass für die absolute Kondition der Auswertung der Funktion f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\kappa_{\text{abs}}(f, x) \leq \kappa_{\text{abs}}(h, x) + \kappa_{\text{abs}}(g, x)$$

gilt.

- b) Verwenden Sie dieses Resultat, um die absolute und die relative Kondition der Auswertung von $f(x) = x^5 + |x^3|$ abzuschätzen.
- c) Berechnen Sie die absolute und die relative Kondition der Auswertung von $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ in $x = 0$. Finden Sie ausserdem ein x für das die Abschätzung aus a) nicht scharf ist.