

7. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK I

WiSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2017/CoMaI.php

Abgabe: Donnerstag, 21. Dezember 2017, 14:00 Uhr

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.

1. Aufgabe (4 TP)

Zur Auswertung einer Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ soll der Algorithmus

$$f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1} = \frac{g_2(g_1(x))}{g_2(g_3(x))}, \quad g_1(x) = x^8, \quad g_2(y) = y - 1, \quad g_3(x) = x^4$$

verwendet werden.

- Bestimmen Sie die relative Stabilität des Algorithmus in $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Was geschieht für $x \rightarrow 1$?
- Geben Sie einen Algorithmus für die Auswertung von f an, für den die relative Stabilität in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ gleichmäßig beschränkt ist. Dabei können Sie Grundrechenarten sowie Elementarfunktionen der Art $h(x) = x^n$ und $h(x) = x + c$ verwenden.

2. Aufgabe (4 TP)

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ sei

$$f(x) := \frac{1}{1 + 2x} - \frac{1 - x}{1 + x}.$$

- Bestimmen Sie $\kappa_{\text{rel}}(f, x)$ für $x > 0$. Diskutieren Sie anschließend die relative Stabilität σ_{rel} für einen beliebigen Algorithmus, der der obigen Darstellung der Abbildungsvorschrift von f entspricht.
- Finden Sie einen stabileren Algorithmus für die Auswertung von f .

3. Aufgabe (8 PP)

Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soll durch die Funktion

$$f_N(x) := \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!}$$

approximiert werden, wobei $N \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Potenzreihenentwicklung ist.

- a) Implementieren Sie f_N in MATLAB, indem Sie eine Funktion `y = exp_approx(x, N)` schreiben, deren Rückgabewert der Auswertung von $f_N(x)$ entspricht.

Außerdem: Falls Sie die Funktion `factorial` verwenden (oder anderweitig in jedem Durchlauf einer Schleife die Fakultät $k!$ mit vergleichbar hohem Aufwand auswerten), gibt es Punktabzug.

- b) Wir betrachten nun die verschiedenen Formulierungen

$$g_1(N, x) = f_N(x), \quad g_2(N, x) = \frac{1}{f_N(-x)}, \quad g_3(N, x, k) = f_N\left(\frac{|x|}{k}\right)^{\text{sign}(x) \cdot k}.$$

Schreiben Sie eine Skriptdatei `run.m`, die für die konkrete Wahl $x = -5,5$ und $k = 11$ sowie für $N \in \{0, 5, 10, \dots, 50\}$ eine Tabelle der Form

```
N err1 err2 err3
```

ausgibt, wobei `err1`, `err2` und `err3` den relativen Fehlern von $g_1(N, x)$, $g_2(N, x)$, $g_3(N, x, k)$ zu $\exp(x)$ entsprechen. Wählen Sie ein sinnvolles Zahlenformat für die Tabelleneinträge und speichern Sie die Tabelle als Textdatei `daten.txt` ab.

- c) Schildern Sie Ihre Beobachtungen und interpretieren Sie die Ergebnisse. Schreiben Sie Ihre Antwort in die Datei `beobachtungen.txt`.

Zur Abgabe der Programme: Packen Sie die Dateien `exp_approx.m`, `run.m`, `daten.txt` und `beobachtungen.txt` in ein ZIP-Archiv. Benennen Sie das ZIP-Archiv mit Ihrem ZEDAT-Accountnamen und schicken Sie dieses per Email an Ihren Tutor. Achten Sie auch auf Groß- und Kleinschreibung bei den Dateinamen.