Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Tobias Kies

9. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik I

WiSe 2017

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2017/CoMaI.php

Abgabe: Donnerstag, 18. Januar 2018, 14:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe Matrix-wertiger Operationen so um, dass sie keine Summenzeichen verwenden.

a) $\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{jk}\right)_{i,j=1}^{n}$ b) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ji}x_iy_j$ c) $(x_iy_j)_{i,j=1}^n$ d) $\left(\frac{\sum_{k=1}^n y_iy_kx_k}{\sum_{k=1}^n y_k^2}\right)_{i=1}^n$

Hinweis: Hier beschreibt die Notation $(c_i)_{i=1}^n$ denjenigen Spaltenvektor in $\mathbb{R}^n$, dessen i-ter Eintrag durch c_i gegeben ist. Analog beschreib die Notation $(C_{ij})_{i,j=1}^n$ dijenige Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, deren Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte durch C_{ij} gegeben ist.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei die *Spaltensummennorm* definiert durch

$$\|A\| := \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|.$$

Zeigen Sie, dass die Spaltensummennorm $\|\cdot\|$ die von $\|\cdot\|_1$ induzierte Matrixnorm ist.

3. Aufgabe (4 TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Beweisen Sie für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

und bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^n$, sodass Gleichheit gilt.

b) Beweisen Sie für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

und bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^n$, sodass Gleichheit gilt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Cauchy–Schwarz-Ungleichung verwenden. (Bzw. äquivalent die Höldersche Ungleichung aus der Vorlesung für $p = 2$.)

4. Aufgabe (4 TP + 2 Bonus TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Im Folgenden bezeichne $\|\cdot\|_2$ diejenige Matrixnorm, die von der euklidischen Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ induziert wird. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Falls A eine Diagonalmatrix ist, also $A_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt, dann gilt die Gleichung $\|A\|_2 = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |A_{ii}|$.

b) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, sodass $Q^T = Q^{-1}$. Weiter sei $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix und wir nehmen an, dass $A = Q^T \Lambda Q$. Beweisen Sie, dass dann $\|A\|_2 = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |\Lambda_{ii}|$ gilt.

5. Aufgabe (2 Bonus TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\|\cdot\|$ die von $\|\cdot\|_\infty$ induzierte Matrixnorm. Beweisen Sie, dass für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Ungleichung

$$\|A\| \geq \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

gilt.

6. Aufgabe (2 Bonus TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

7. Aufgabe (2 Bonus TP)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\|_a = 0 \iff \lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\|_b = 0.$$

8. Aufgabe (2+3+3 Bonus PP)
Wir möchten das Verhalten der $\|\cdot\|_p$-Normen visuell untersuchen.

a) Implementieren sie eine Funktion `c = pfunc(x,p)`, die zu einem Eingabevektor `x` und einem Skalar `p` mit `p` $\in (0, \infty)$ den Wert

$$c = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

bzw. für `p` $= \infty$ den Wert

$$c = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i|$$

berechnet. Hier bezeichnet n die Dimension des Eingabevektors `x`. Sie dürfen dabei nicht die MATLAB-interne Funktion `norm` verwenden.

b) Wir beschränken uns nun auf den zweidimensionalen Fall und betrachten mathematisch gesehen jetzt für $p \in (0, \infty]$ die Funktionen

$$f_p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \texttt{pfunc(x,p)}.$$

Schreiben Sie ein Skript `run.m`, in dem Sie Ihre Funktion `pfunc` nutzen, um für

$$p \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1, 2, 3, 4, 10, 50, 100, \infty\}$$

die folgenden Plots der Funktion f_p auf dem Gebiet $[-2, 2]^2$ zu erstellen:

i) Ein 2D-Kontur Plot, den Sie unter `contour_2D_{p}.png` abspeichern, wobei Sie "{p}" durch das aktuelle p ersetzen. Verwenden Sie hierfür die Funktion `contour`.

ii) Ein 3D-Plot mit darunterliegenden Konturlinien, den Sie unter dem Dateinamen `contour_3D_{p}.png` abspeichern, wobei Sie "{p}" durch das aktuelle p ersetzen. Verwenden Sie hierfür die Funktion `surfc`.

c) Was zeigen die Grafiken und was beobachten Sie? Entsprechen die Beobachtungen Ihren Erwartungen? Erläutern Sie insbesondere das Verhalten für $p \to \infty$ und für $p \to 0$. Was schließen Sie aus diesen Beobachtungen für die Konstanten in den Ungleichungen zur Normäquivalenz aus der Vorlesung? Welche Besonderheit gilt für $p < 1$ und wie wirkt sich dies auf die Normeigenschaft aus? Schreiben Sie Ihre Antwort in die Textdatei beobachtungen.txt.

Hinweis: Zum Plotten zweidimensionaler Funktionen finden Sie womöglich den entsprechenden Abschnitt im Einführungsskript hilfreich.

Zur Abgabe der Programme: Packen Sie die Dateien `run.m`, `beobachtungen.txt` sowie alle erstellten Grafiken in ein ZIP-Archiv. Benennen Sie das ZIP-Archiv mit Ihrem ZEDAT-Accountnamen und schicken Sie dieses per Email an Ihren Tutor. Achten Sie auch auf Groß- und Kleinschreibung bei den Dateinamen.